

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUẢNG BÌNH

=====

Đề tài nghiên cứu khoa học

**PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH
BẤT ĐẲNG THỨC**



Giáo viên hướng dẫn : Nguyễn Chiến Thắng

Nhóm tác giả: Tập thể chuyên Toán khóa 2012-2015

LỜI NÓI ĐẦU

Trong môn Toán ở trường THPT, bất đẳng thức ngày càng được quan tâm đúng mức và tỏ ra có sức hấp dẫn mạnh mẽ nhờ vẻ đẹp và tính độc đáo của phương pháp và kỹ thuật giải chúng cũng như yêu cầu cao về tư duy cho người giải. Bất đẳng thức là một trong những dạng toán hay và khó đối với học sinh trong quá trình học tập cũng như trong các kỳ thi, trước hết là kỳ thi đại học mà hầu hết học sinh THPT đều phải vượt qua. Ngoài ra bất đẳng thức cũng là một dạng thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi toán ở các cấp tỉnh, Quốc gia, Olympic khu vực và Olympic quốc tế.

Các bài toán bất đẳng thức không những rèn luyện tư duy sáng tạo, trí thông minh mà còn đem lại say mê và yêu thích môn Toán của người học.

Trong đề tài nghiên cứu khoa học này, tập thể lớp 10 Toán trường THPT Chuyên Quảng Bình xin trình bày một số vấn đề về bất đẳng thức, một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Đề tài gồm các bài viết của các nhóm tác giả được trình bày dưới dạng các chuyên đề.

Nhóm tác giả

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	2
MỤC LỤC	3
BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM VÀ ỨNG DỤNG	7
1. Bất đẳng thức AM-GM	7
1.1. Định lý	7
1.2. Chứng minh	7
1.3. Các dạng thường gặp	8
2. Ví dụ	8
3. Bài tập tự giải	23
BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI VÀ ỨNG DỤNG	24
1. Bất đẳng thức Minkowski	24
1.1 Bất đẳng thức Minkowski dạng 1	24
1.1.1 Định lý	24
1.1.2 Chứng minh	24
1.2 Bất đẳng thức Minkowski dạng 2	25
1.2.1 Định lý	25
1.2.2 Chứng minh	25
2. Ví dụ	25
3. Bài tập tự giải	28
BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER VÀ ỨNG DỤNG	29
1. Bất đẳng thức Holder	29
1.1 Dạng tổng quát	29
1.1.1 Định lý	29
1.1.2 Chứng minh	29
1.2 Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder	30
1.3 Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder	30
1.4 Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder	30
2. Ví dụ	30
3. Bài tập tự giải	41
BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ	43

1. Bất đẳng thức Cauchy-schwarz	43
1.1. Định lý	43
1.2. Chứng minh	43
1.3. Hệ quả	45
2. Ví dụ	45
3. Bài tập tự giải	78
BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV	82
1. Bất đẳng thức Cheybyshev	82
1.1. Định lý	82
1.2. Chứng minh	82
2. Ví dụ	83
3. Bài tập tự giải	96
BẤT ĐẲNG THỨC MUIRHEAD	97
1. Giới thiệu bất đẳng thức Muirhead	97
2. Một số khái niệm liên quan đến Bất đẳng thức Muirhead	97
2.1. Bộ trội	97
2.2. Trung bình loại $[a]$	98
2.3. Tổng hoán vị	98
2.4. Tổng đối xứng	98
2.5. Lược đồ Young	99
3. Định lý Muirhead	99
4. Kỹ thuật sử dụng định lý Muirhead	101
Phương pháp chung	101
5. Sử dụng định lý Muirhead với AM – GM, Holder, ASYM, Schur	102
5.1. Bất đẳng thức AM – GM	102
5.2. Bất đẳng thức Holder	102
5.3. Bất đẳng thức ASYM	102
5.4. Sử dụng định lý Muirhead với bất đẳng thức Schur	102
6. Ví dụ	103
7. Bài tập tự giải	112

PHƯƠNG PHÁP PQR	114
1. Kiến thức liên quan	114
1.1. Định nghĩa và các phép biến đổi	114
1.2. Phương pháp pqr kết hợp bất đẳng thức Schur	114
1.3. Mở rộng phương pháp pqr kết hợp hàm số	117
2. Bài tập tự giải	119
PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG S.O.S	124
1. Lý thuyết và ví dụ	124
1.1 Định lý và các kỹ thuật phân tích	124
1.2. Các tiêu chuẩn và kỹ thuật sắp xếp biến	130
1.3. Ứng dụng tìm hằng số k tốt nhất	135
2. Bài tập tự giải	137
3. Mở rộng	141
SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP S.O.S TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC	142
1. Lời nói đầu	142
2. Xây dựng định lý, tiêu chuẩn	142
3. Phân tích cơ sở	143
4. Các ứng dụng của phương pháp S.O.S	144
5. Bài tập vận dụng	149
6. Bài tập dành cho bạn đọc	151
PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN	153
1. Kiến thức liên quan	153
2. Ví dụ minh họa	157
3. Bài tập vận dụng	184
SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC	187
1. Phương trình tiếp tuyến tổng quát	187
2. Sử dụng tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức	187
3. Ví dụ	188

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE	203
1. Cơ sở lí thuyết	203
2. Một số ví dụ	204
3. Bài tập vận dụng	215
KẾT LUẬN	218

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM VÀ ỨNG DỤNG

Đoàn Quốc Đạt – Ngô Hoàng Thanh Quang

1. Bất đẳng thức AM-GM

1.1. Định lý

Định lý (Bất đẳng thức AM-GM). Với mọi số thực dương a_1, a_2, \dots, a_n ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1.2. Chứng minh

Phương pháp “Quy nạp Cauchy”

$$\text{Với } n=2: \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \text{ (đúng)}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=2k$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}}{2k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}}{2k} \right) \\ &\geq \left[\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}} \right] \geq \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_{2k}} \end{aligned}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=p$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=p-1$.

Thật vậy, xét $p-1$ số: $a_1, a_2, \dots, a_{p-1} \geq 0$. Sử dụng giả thiết quy nạp với $n=p$ ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + \sqrt[p-1]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}}{p} \geq \sqrt[p]{a_1 \dots a_{p-1} \cdot \sqrt[p-1]{a_1 \dots a_{p-1}}} = \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + \sqrt[p-1]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \geq p \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} \geq (p-1) \cdot \sqrt[p-1]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}}{p-1} \geq \sqrt[p-1]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1.3. Các dạng thường gặp

n	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Điều kiện	$\forall a, b \geq 0$	$\forall a, b, c \geq 0$	$\forall a, b, c, d \geq 0$
Dạng 1	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$	$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$
Dạng 2	$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$	$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$	$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$
Dấu bằng	$a=b$	$a=b=c$	$a=b=c=d$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: (Bất đẳng thức Nesbit) Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Giải: Xét các biểu thức sau

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

$$M = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$$

$$N = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}$$

Ta có $M+N=3$. Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$M + S = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3$$

$$N + S = \frac{a+c}{b+c} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3$$

Vậy $M + N + 2S \geq 6 \Rightarrow 2S \geq 3$ hay

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ (đpcm)

Nhận xét: Bài này còn nhiều cách giải khác nhưng có lẽ đây là cách hay nhất vì việc nghĩ ra các biểu thức M, N không phải là dễ dàng.

Ví dụ trên phần nào cho ta thấy được sức mạnh và sự tinh tế của bất đẳng thức AM-GM, nhưng đó chỉ mới là một ví dụ đơn giản. Chúng ta sẽ xét đến kĩ thuật thêm bớt trong bất đẳng thức AM-GM qua ví dụ sau.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Giải: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a$$

$$\frac{b^2}{a+c} + \frac{a+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{a+c} \cdot \frac{a+c}{4}} = b$$

$$\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = c$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$$

$$\text{Hay } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ (đpcm)

Nhận xét: Đây là dạng bài tập đánh giá điểm rơi từ AM sang GM. Nếu những ai mới chỉ tiếp xúc qua bất đẳng thức AM-GM thì có thể nhận xét rằng việc tìm ra

đánh giá $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a$ có vẻ mang nhiều tính may mắn. Nhưng

không phải vậy, chúng ta cùng để ý, điểm rơi của bất đẳng thức trên tại $a=b=c$.

Khi đó $\frac{a^2}{b+c} = \frac{a}{2}$, chúng ta phải tạo ra một biểu thức để vừa có giá trị bằng $\frac{a}{2}$, vừa

có thể loại được mẫu của biểu thức $\frac{a^2}{b+c}$. Hơn nữa, 2 vế của bất đẳng thức là đồng

bậc 1, từ đó dễ dàng nhận ra biểu thức thêm vào phải là $\frac{b+c}{4}$.

Sử dụng kết quả bài này ta có thể làm bài toán sau:

Ví dụ 3: [IMO 1995] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{abc}{a^3(b+c)} + \frac{abc}{b^3(a+c)} + \frac{abc}{c^3(a+b)} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, ta quay trở lại ví dụ 2.

Nhận xét: Bài này có thể giải bằng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* mà chúng ta sẽ xét trong phần sau.

Ví dụ 4: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Giải: Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a+b+2c} &= \frac{ab}{(a+c)+(b+c)} \leq ab \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \\ \frac{bc}{b+c+2a} &= \frac{bc}{(a+b)+(b+c)} \leq bc \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right) \\ \frac{ca}{c+a+2b} &= \frac{ca}{(a+b)+(b+c)} \leq ca \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right)\end{aligned}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Nhận xét: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng bất đẳng thức *AM-GM* dạng cộng mẫu số: Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương. Ta có:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ví dụ 5: Cho 3 số a, b, c không âm, chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Giải: Xét bất đẳng thức phụ sau:

$$\sqrt{1+x^3} \leq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (\forall x \geq 0)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức *AM-GM*, ta có:

$$\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \leq \frac{1+x+1-x+x^2}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{a}\right)^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: Bài toán trên thuộc dạng bài tập đánh giá điểm rơi của bất đẳng thức từ biểu thức GM sang AM . Điểm khó của ví dụ trên là nằm ở chỗ đổi biến và tìm ra bất đẳng thức phụ (1). Bài tập trên còn có thể giải bằng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*.

Ví dụ 6 [*diendantoanhoc.net*] Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$

.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}$$

Giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{ab+bc+ca}{ab} + \frac{ab+bc+ca}{bc} + \frac{ab+bc+ca}{ca} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+ab+bc+ca}{a^2}} + 3$$

$$\Leftrightarrow 3 + \sum_{cyc} \frac{a}{b} + \sum_{cyc} \frac{b}{a} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a.a}} + 3$$

Mà theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a.a}} \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{cyc} \frac{a}{b} + \sum_{cyc} \frac{b}{a} + 6 \right)$$

Cần chứng minh $\sum_{cyc} \frac{a}{b} + \sum_{cyc} \frac{b}{a} \geq 6$ (hiển nhiên đúng theo $AM-GM$)

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Nhận xét: Với bài toán trên, nếu khéo léo sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ thì bài toán sẽ trở nên đơn giản.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}$$

Giải: Đặt $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z$. Khi đó, ta có:

$$\frac{a+b}{c+a} = \frac{1+yz}{1+z} = y + \frac{1-y}{1+z}$$

Bài toán quy về việc chứng minh:

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(z+1) + (y^2-1)(x+1) + (z^2-1)(y+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2z + z^2y + y^2x + x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z + 3$$

Dễ thấy theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$x^2z + z^2y + y^2x \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x+y+z \quad (\text{vì } x+y+z \geq 3)$$

Kết thúc chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: Để ý rằng biểu thức ở vế phải của bất đẳng thức chứa phép cộng giữa 2 biến ở cả tử và mẫu nên việc sử dụng bất đẳng thức *AM-GM* một cách trực tiếp là vô cùng khó khăn. Do đó phương án khả dĩ nhất là đổi biến để tạo ra bất đẳng thức mới.

Bây giờ, chúng ta sẽ xét tới một kĩ thuật mới trong việc chứng minh bất đẳng thức bằng *AM-GM*, đó là kĩ thuật đánh giá phủ định. Kĩ thuật này được dùng để chứng

minh một số bất đẳng thức khi áp dụng trực tiếp *AM-GM* thì bị ngược dấu rất hiệu quả.

Ví dụ 8 [*Bulgarian TST 2003*] Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh:

$$S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Giải: Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2} &= a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \\ \frac{b}{1+c^2} &= b - \frac{bc^2}{1+c^2} \geq b - \frac{bc^2}{2c} = b - \frac{bc}{2} \\ \frac{c}{1+a^2} &= c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq c - \frac{ca^2}{2a} = c - \frac{ca}{2} \end{aligned}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có:

$$S \geq (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) = 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

Mặt khác: $9 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$

Từ đó suy ra $S \geq \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Nhận xét: 1. Ở bất đẳng thức ban đầu, nếu ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức *AM-GM* thì sẽ bị ngược dấu. Ví dụ:

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+b^2)(1+c^2)(1+a^2)}} \leq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{2b \cdot 2c \cdot 2a}} = \frac{3}{2} \quad (\text{sai})$$

2. Ta có bài toán tổng quát của bài toán trên:

Cho các số thực dương a_1, a_2, \dots, a_n thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2} \geq \frac{n}{2}$$

Ví dụ 9: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right) \geq 28$$

Giải: Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$(ab+bc+ca)^2 (a^2+b^2+c^2) \leq \left[\frac{2(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2)}{3} \right]^3 = \frac{(a+b+c)^6}{27}$$

Suy ra:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(ab+bc+ca)^3}{(ab+bc+ca)^2 (a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{27(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}$$

Cần chứng minh:
$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{27^2 (ab+bc+ca)^6}{(a+b+c)^{12}} \geq 28$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$\frac{4(a+b+c)^3}{27abc} + \frac{27^2 (ab+bc+ca)^6}{(a+b+c)^{12}} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{(ab+bc+ca)^6}{27^2 (abc)^4}} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{(3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2})^6}{27^2 (abc)^4}} = 5 \quad (1)$$

Mặt khác, ta có:
$$23 \cdot \frac{(a+b+c)^3}{27abc} \geq 23 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$

Nhận xét: Trong bài toán trên nếu không quan sát kỹ lưỡng mà áp dụng ngay bất đẳng thức *AM-GM* thì sẽ dẫn đến ngược dấu vì $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$ nhưng

$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq 1$. Qua đó cho chúng ta thấy được vẻ đẹp và sức mạnh của phối hợp hai bất đẳng thức đồng bậc ngược chiều.

Ví dụ 10 [IMO 2005]: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

Giải: Bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Từ đây ta suy ra chỉ cần xét trường hợp $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^5 - x^2 + 3} \leq 1$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$x^5 = \frac{x^6}{x} \geq \frac{2x^6}{x^2 + 1}$$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$. Suy ra: $a + b + c = 3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\frac{2a^3}{a+1} - a + 3} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{2a^3 - a^2 + 2a + 3} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-1)^2(-2a^2 + 3a + 3)}{2a^3 - a^2 + 2a + 3} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $a \geq 1 \geq c$. Xét 2 trường hợp:

+TH1: $b + c \geq 1$, suy ra $a \leq 2$, khi đó:

$$-2a^3 + 3a + 3 > 0$$

$$-2b^3 + 3b + 3 > 0$$

$$-2c^3 + 3c + 3 > 0$$

Suy ra, (1) đúng.

+TH2: $b+c \leq 1$, suy ra $a \geq 2$, khi đó:

$$(2a^3 - a^2 + 2a + 3) - 5(a+1) = 2a^3 - a^2 - 3a - 2$$

$$= a^3 \left(2 - \frac{1}{a} - \frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^3} \right) \geq a^3 \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^3} \right) = \frac{a^3}{2} > 0$$

Suy ra $\frac{a+1}{2a^3 - a^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{5}$. Cần chứng minh:

$$\frac{b+1}{2b^3 - b^2 + 2b + 3} + \frac{c+1}{2c^3 - c^2 + 2c + 3} \leq \frac{4}{5}$$

Ta có bổ đề: Với mọi $0 < x < 1$, ta có:

$$\frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \leq \frac{2}{5} \quad (2)$$

Ta có (2) tương đương với: $4x^3 \geq (x+1)(2x-1)$

+ Nếu $x \leq \frac{1}{2}$, ta có điều phải chứng minh.

+ Nếu $x \geq \frac{1}{2}$, ta có:

$$4x^3 - (x+1)(2x-1) \geq 4x^3 - 2(2x-1) = 2(2x^3 - 2x + 1)$$

$$\geq 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét: 1. Điểm khó của bài toán này là việc đưa bất đẳng thức về dạng (1) nhờ bất đẳng thức AM-GM.

2. Bài toán này có thể giải bằng một số cách khác như *Cauchy-Schwarz*, *S.O.S*, *U.C.T*.

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét một số ví dụ về sự kết hợp giữa bất đẳng thức *AM-GM* với một số bất đẳng thức cũng như phương pháp khác.

Đầu tiên chúng ta sẽ xét tới sự kết hợp giữa 2 bất đẳng thức *AM-GM* và *Cauchy-Schwarz*:

Ví dụ 11 [*diendantoanhoc.net*] Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}} + \frac{1}{b\sqrt{3b+2c}} + \frac{1}{c\sqrt{3c+2a}} \geq \frac{3}{\sqrt{5abc}}$$

Giải: Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{3zx+2yz}} + \frac{x}{\sqrt{3xy+2zx}} + \frac{x}{\sqrt{3yz+2xy}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{5z} \cdot \sqrt{3x+2y}} + \frac{y}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{3y+2z}} + \frac{z}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{3z+2x}} \geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* và *Cauchy-Schwarz*, ta có:

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{5z} \cdot \sqrt{3x+2y}} \geq 2 \sum_{cyc} \frac{x}{3x+2y+5z} \\ & \geq \frac{2(x+y+z)^2}{x(3x+2y+5z) + y(5x+3y+2z) + z(2x+5y+3z)} \\ & = \frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2) + 7(xy+yz+zx)} \\ & = \frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{3}(xy+yz+zx) + \frac{20}{3}(xy+yz+zx)} \\ & \geq \frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2) + \frac{20}{3}(xy+yz+zx)} \\ & = \frac{3(x+y+z)^2}{5[x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Tiếp theo sẽ là sự kết hợp đầy ngoạn mục giữa 2 bất đẳng thức *AM-GM* và *Schur* qua ví dụ sau đây:

Ví dụ 12 [Vasile Cirtoaje]: Cho các số không âm a, b, c sao cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3$.

Chúng minh rằng:

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \leq 3$$

Giải: Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$bc \leq \frac{b^3 + c^3 + 1}{3} = \frac{4 - a^3}{3} \quad (1)$$

Từ đó suy ra:

$$b^4c^4 \leq \frac{4b^3c^3 - a^3b^3c^3}{3}$$

Tương tự ta có:

$$a^4b^4 \leq \frac{4a^3b^3 - a^3b^3c^3}{3}$$

$$c^4a^4 \leq \frac{4c^3a^3 - a^3b^3c^3}{3}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \leq \frac{4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)}{3} - a^3b^3c^3$$

Cần chứng minh:

$$\frac{4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)}{3} - a^3b^3c^3 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) - 3a^3b^3c^3 \leq 9$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *Schur*, ta có:

$$4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)(a^3 + b^3 + c^3) - 9a^3b^3c^3 \leq (a^3 + b^3 + c^3)^3$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) - 3a^3b^3c^3 \leq 9$$

Vậy bất đẳng thức trên đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét: Trong ví dụ trên, nếu không phát hiện ra bất đẳng thức phụ (1) thì việc giải là rất khó khăn. Ví dụ trên còn có thể giải quyết bằng phương pháp dồn biến.

Cuối cùng, ta sẽ xét đến sự kết hợp giữa bất đẳng thức *AM-GM* và phương pháp khảo sát hàm số.

Ví dụ 13 [Việt Nam TST 2005]: Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Giải: Đặt $\frac{b}{a} = x, \frac{c}{b} = y, \frac{a}{c} = z, \Rightarrow xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{8} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8(1+x)^6}} = \frac{3}{2(1+x)^2} \\ \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{8} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8(1+y)^6}} = \frac{3}{2(1+y)^2} \\ \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{1}{8} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8(1+z)^6}} = \frac{3}{2(1+z)^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$ (1)

Ta có: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} (\forall x, y > 0)$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + (xy-1)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Suy ra: $VT(1) \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z^2+z+1}{z^2+2z+1}$

Giả sử $z = \max\{x, y, z\} \Rightarrow z \geq 1$.

Xét hàm số: $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2+2z+1}$

Ta có:
$$f'(z) = \frac{z^2 - 1}{(z+1)^4} \geq 0, \forall z \geq 1$$

Từ đó suy ra: $f(z) \geq f(1) = \frac{3}{4}$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Nhận xét: Ví dụ trên là một bài toán hay và khó. Để giải được bất đẳng thức trên cần phối hợp rất nhiều kỹ thuật mà lời giải trên nằm trong những lời giải nhanh và hay nhất cho bài này.

Sau đây, chúng ta sẽ xét thêm 2 ví dụ về dấu bằng không đối xứng trong bất đẳng thức *AM-GM*, qua đó, ta sẽ thấy hết được vẻ đẹp và sự tinh tế của bất đẳng thức.

Ví dụ 14: Cho các số a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5$$

Giải: Ta có:

$$\begin{aligned} & a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \\ &= a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} + b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)} + c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \\ &\leq a \cdot \frac{b^2+2}{2} + b \cdot \frac{c^2+2}{2} + c \cdot \frac{a^2+2}{2} \\ &= \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{2} + 3 \end{aligned}$$

Cần chứng minh: $ab^2+bc^2+ca^2 \leq 4$ (1)

Giả sử b là số nằm giữa 2 số a, c . Ta có:

$$\begin{aligned} & a(b-a)(b-c) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow ab^2 + a^2c \leq a^2b + abc \\ & \Rightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq a^2b + abc + bc^2 = b(a^2 + ac + c^2) \\ & \leq b(a+c)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (3-b)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2b+3-b+3-b}{3} \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=1, c=2$ và các hoán vị.

Nhận xét: Cái khó trong ví dụ này là đánh giá được bất đẳng thức (1). Ngoài cách đánh giá như trên, để chứng minh (1) có thể dùng phương pháp dồn biến về biên.

Ví dụ 15 [Tập chí TH&TT]: Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thuộc $[0;2]$. Chứng minh:

$$P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}$$

Giải: Không mất tính tổng quát giả sử $2 \geq a > b > c \geq 0$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + (a-b) + (a-b) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a-b)^2} \cdot (a-b) \cdot (a-b)} = 3 \quad (*)$$

$$\frac{1}{(b-c)^2} + (b-c) + (b-c) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b-c)^2} \cdot (b-c) \cdot (b-c)} = 3$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + 2(a-c) &\geq 6 \\ \Rightarrow P &\geq \frac{1}{(a-c)^2} - 2(a-c) + 6 \end{aligned}$$

$$\text{Cần chứng minh: } P \geq \frac{1}{(a-c)^2} - 2(a-c) + 6 \geq \frac{9}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Vì } 2 \geq a > b > c \geq 0 \text{ nên } 0 < a-c \leq 2 \Rightarrow P \geq \frac{1}{2^2} - 2.2 + 6 = \frac{9}{4}$$

Vậy $P \geq \frac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=1, c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Trong bài toán trên, nếu ta áp dụng 3 lần bất đẳng thức (*) cho 3 biến $(a-b), (b-c), (c-a)$ thì bất đẳng thức sẽ rơi vào ngõ cụt, không thể đi tiếp. Đến lúc dẫn đến bất đẳng thức (1) là bất đẳng thức một biến thì bài toán đã trở nên đơn giản, ta nghĩ ngay đến phương pháp khảo sát hàm số trên đoạn.

Vậy là chúng ta đã cùng nhau đi hết chặng đường khám phá bất đẳng thức AM-GM. Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức đã được đưa ra trong mục 1. Các kỹ thuật chuyển đổi qua lại giữa trung bình cộng và trung bình nhân đã được trình bày trong các ví dụ 2, 3, 4, 5. Kỹ thuật phối hợp giữa bất đẳng thức AM-GM và biến đổi đại số thông thường đã được đề cập trong các ví dụ 6, 7. Các kỹ thuật đánh giá phủ định và phối hợp các bất đẳng thức đồng bậc ngược chiều đã được giới thiệu qua các ví dụ 8, 9. Sự kết hợp giữa bất đẳng thức AM-GM và các bất đẳng thức khác được giới thiệu trong các ví dụ 11, 12, 13. Cuối cùng, phương pháp cân bằng hệ số hay dấu

bằng không đối xứng trong bất đẳng thức *AM-GM* đã được đề cập trong hai ví dụ 14, 15. Qua các ví dụ trên phần nào cho chúng ta thấy vẻ đẹp, sức mạnh, sự linh hoạt của bất đẳng thức *AM-GM* trong việc chứng minh bất đẳng thức. Sau đây là một số bài tập để giúp các bạn củng cố kiến thức:

3. Bài tập tự giải

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

Bài 2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

Bài 3. [Russia MO] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

Bài 4. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số thực $x, y, z > -1$:

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2$$

Bài 6. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3$$

Bài 7. [MOSP 2001] Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$$

Bài 8. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

Bài 9. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1 + \sqrt[3]{abc})}$$

BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI VÀ ỨNG DỤNG

Đoàn Quốc Đạt – Ngô Hoàng Thanh Quang

1. Bất đẳng thức Minkowski

1.1 Bất đẳng thức Minkowski dạng 1

1.1.1 Định lý

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $1 < p \in \mathbb{R}^+$, khi đó $\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Đặc biệt: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \geq \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2 + (c+p)^2}$$

1.1.2 Chứng minh

Lấy $q \in \mathbb{R}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sử dụng bất đẳng thức *Holder* cho 2 bộ dãy số:

$$\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ (a_1 + b_1)^{p-1}, (a_2 + b_2)^{p-1}, \dots, (a_n + b_n)^{p-1} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ (a_1 + b_1)^{p-1}, (a_2 + b_2)^{p-1}, \dots, (a_n + b_n)^{p-1} \end{cases}$$

Ta có: $(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \left[(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1}$

$$(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \left[(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

Lại có: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p = (p-1)q$, nên cộng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

1.2 Bất đẳng thức Minkowski dạng 2:

1.2.1 Định lý

$$\text{Cho } \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \text{ khi đó ta có bất đẳng thức}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots + \sqrt[n]{l_1 l_2 \dots l_n} \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i + \dots + l_i)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

1.2.2 Chứng minh:

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots + \sqrt[n]{l_1 l_2 \dots l_n} \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i + \dots + l_i)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq 1 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1 + \dots + l_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n + b_n + \dots + l_n} \right) \\ & \dots \\ & \sqrt[n]{\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{l_1}{a_1 + b_1 + \dots + l_1} + \dots + \frac{l_n}{a_n + b_n + \dots + l_n} \right) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq 1 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

2. Ví dụ:

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a, b . Chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right)} \quad (1)$$

HD: Đưa bất đẳng thức (1) về dạng:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Minkowski* loại 2 ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + (b+c)^2} + \sqrt{b^2 + (c+a)^2} + \sqrt{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt{2}}$$

HD: Vì bất đẳng thức trên là thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa: $a+b+c=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sqrt{a^2 + (1-a)^2} + \sqrt{b^2 + (1-b)^2} + \sqrt{c^2 + (1-c)^2} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có: } VT \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + (3-a-b-c)^2} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c+3-a-b-c)^2}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = VP$$

Vậy ta có điều phải chứng minh,

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c \leq 1$. Tìm min của:

$$P = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

$$\textbf{Giải:} \text{ Ta có: } P \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(ab + bc + ca + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\sum a^2 + \sum \frac{1}{81a^2} + \frac{80}{81}\left(\sum \frac{1}{a^2} + 2\sum \frac{1}{ab}\right) + 2\left(ab + bc + ca + \frac{1}{81ab} + \frac{1}{81bc} + \frac{1}{81ca}\right)} \\ &\geq \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{80}{81}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{4}{3}} \geq \sqrt{82} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min P = \sqrt{82} \text{ khi và chỉ khi } a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Nhận xét: Với bài toán trên nếu vội vàng áp dụng ngay bất đẳng thức *AM-GM* thì sẽ không thỏa mãn điều kiện $a+b+c \leq 1$ dẫn đến sai. Ta có bài toán tổng quát của

bài trên: Cho các số thực dương a_1, a_2, \dots, a_n thỏa mãn $a_1, a_2, \dots, a_n \leq \frac{n}{2}$. Tìm min:

$$\sqrt{a_1^2 + \frac{1}{a_2^2}} + \sqrt{a_2^2 + \frac{1}{a_3^2}} + \dots + \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_1^2}}$$

Ví dụ 4: Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1. \text{ Chứng minh:} \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức *Minkowski* loại 2 ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}\right)^n$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n}$$

Do đó:
$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{2b^2 + c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{2c^2 + a^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$$

Giải: Theo bài ra ta có: $ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Minkowski*, ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \geq \sqrt{3}$$

Bất đẳng thức trên chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Nhận xét: Bài này không khó, chỉ cần tinh ý đưa bất đẳng thức về dạng (1) là bài toán trở nên rất dễ.

Ví dụ 6: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (1+a)(1+b)(1+c)(1+abc)$$

Giải: Bỏ đề: $2(1+u^2)^3 \geq (1+u)^3(1+u^3), \forall u > 0$ (1) $(\Leftrightarrow (u-1)^4(u^2+u+1) \geq 0)$

Quay trở lại bài toán, ta có:

$$\begin{aligned} \left[2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \right]^3 &= 2(1+a^2)^3 \cdot 2(1+b^2)^3 \cdot 2(1+c^2)^3 \\ &\geq (1+a)^3(1+a^3)(1+b)^3(1+b^3)(1+c)^3(1+c^3) \\ &= (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \left[(1+a)(1+b)(1+c) \right]^3 \\ &\geq \left[(1+abc)(1+a)(1+b)(1+c) \right]^3 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

3. Bài tập tự giải

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+c^2} \geq \sqrt{1+\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2} + \sqrt{1+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^2} + \sqrt{1+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^2}$$

Bài 2. Chứng minh rằng:

$$(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_n-1) \leq \left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - 1 \right)^n, \forall a_i > 0$$

Bài 3. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{m+k\sqrt[p]{p}} + \sqrt[n]{m-k\sqrt[p]{p}} < 2\sqrt[n]{m}, \forall \begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ m, p, m-k\sqrt[p]{p} > 0 \end{cases}$$

Bài 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq \frac{3}{2}$. Tìm min:

$$S = \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{b^3}} + \sqrt[3]{b^3 + \frac{1}{c^3}} + \sqrt[3]{c^3 + \frac{1}{a^3}}$$

BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER VÀ ỨNG DỤNG

Đoàn Quốc Đạt – Ngô Hoàng Thanh Quang

1. Bất đẳng thức Holder

1.1 Dạng tổng quát

1.1.1 Định lý

Cho 2 bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p, q \in \mathbb{R}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó, ta có:

$$\left(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

1.1.2 Chứng minh

Bổ đề: Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$ và $p, q \in \mathbb{R}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó: $\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \geq ab$.

Chứng minh: Vì $p, q \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists m, n, k \in \mathbb{R}^+$

Sao cho $\frac{1}{p} = \frac{m}{k}, \frac{1}{q} = \frac{n}{k}$ với $m+n=k$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} = \frac{m}{k} \cdot a^{\frac{k}{m}} + \frac{n}{k} \cdot b^{\frac{k}{n}} = \frac{m \cdot a^{\frac{k}{m}} + n \cdot b^{\frac{k}{n}}}{k} \geq \sqrt[k]{a^k b^k} = ab$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^p = b^q$.

Áp dụng bổ đề $a = \frac{a_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, b = \frac{b_j}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ với $j = \overline{1, n}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot \frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_j^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} &\geq \frac{a_j \cdot b_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_j^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right) \geq \sum_{j=1}^n \frac{a_j \cdot b_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \geq \frac{\sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{aligned}$$

1.2. Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder [Bất đẳng thức Francis-Lithewood]

Cho 2 bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p, q \in \mathbb{R}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó, ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^{pq} \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^q (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^p, \forall pq \neq 0$$

1.3 Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+ \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \dots l_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_2}} \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

1.4 Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder [Bất đẳng thức Jensen]

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} \alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha + \beta + \dots + \gamma = 1 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^n (a_i^\alpha b_i^\beta \dots l_i^\gamma) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^\beta \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i \right)^\gamma$$

2. Ví dụ

Trong thế giới bất đẳng thức, các bất đẳng thức có chứa căn thức hoặc các lũy thừa bậc cao luôn là chướng ngại vật cản bước chúng ta. Việc chứng minh các bất đẳng thức như vậy luôn gặp khó khăn và thường làm chúng ta tốn rất nhiều thời gian. Những ý nghĩ như lũy thừa để khử căn thức trong nhiều trường hợp sẽ đưa ta đến với những bài toán phức tạp và khó hơn bài toán gốc. Tuy nhiên, không hẳn là không có cách giải quyết vấn đề này; một trong những cách xử lý tốt đó chính là sử dụng bất đẳng thức *Holder*:

Để hiểu rõ hơn về bất đẳng thức này, chúng ta sẽ đến với ví dụ sau:

Ví dụ 1 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} \geq 4(a+b+c) \sqrt{\frac{a+b+c}{3(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Một câu hỏi được đặt ra là: *Tại sao lại nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức Holder?*

- Như đã nói ở trên thì việc căn thức xuất hiện căn thức ở cả 2 vế gợi cho chúng ta ý tưởng bình phương cả 2 vế. Khi đó, ta cần chứng minh:

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} \right)^2 \geq \frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Xem ra, bước đầu chúng ta khá thành công trong việc khử đi dấu căn thức ở vế phải. Tuy nhiên, đến đây, nếu như biến đổi tương đương thì sẽ tốn khá nhiều thời gian, vì vế trái còn có sự xuất hiện của $\sqrt{a}; \sqrt{b}; \sqrt{c}$ dưới mẫu của các phân thức. Điều cần thiết bây giờ là phải triệt tiêu được các đại lượng này.

Nếu như sử dụng bất đẳng thức *Holder* kiểu :

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} \right)^2 (c+b+a) \geq \left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{c+a} + \sqrt[3]{b+c} \right)^3$$

Thế nhưng cách này vẫn chưa phù hợp; nếu làm như trên, ta cần phải chứng minh

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{c+a} + \sqrt[3]{b+c} \right)^3}{a+b+c} \geq \frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Tuy nhiên, việc chứng minh bất đẳng thức này lại bế tắc do sự xuất hiện của các đại lượng $\sqrt[3]{a+b}; \sqrt[3]{c+a}; \sqrt[3]{b+c}$ ở vế trái. Do đó, chúng ta sẽ không đi theo con đường này. Vậy, bây giờ phải làm thế nào? Các ý tưởng khử căn thức hầu như đã được sử dụng nhưng công việc chứng minh vẫn không thành công. Rõ ràng là chúng ta cần phải tinh tế hơn chút nữa. Để ý rằng trong bước khử $\sqrt{a}; \sqrt{b}; \sqrt{c}$ bằng

việc sử dụng bất đẳng thức *Holder* nếu như thay đại lượng nhân thêm $(c+b+a)$ bằng $\left[c(a+b)^2 + b(c+a)^2 + a(b+c)^2 \right]$ thì ta số mũ $a+b; c+a; b+a$ sẽ là số nguyên. Khi đó ta có :

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} \right)^2 \left[c(a+b)^2 + b(c+a)^2 + a(b+c)^2 \right] \geq (a+b+c+a+b+a)^3$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{8(a+b+c)^3}{c(a+b)^2 + b(c+a)^2 + a(b+c)^2} &\geq \frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \\ \Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 2 \left[c(a+b)^2 + b(c+a)^2 + a(b+c)^2 \right] \\ \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) &\geq 9abc \end{aligned}$$

Đây là một kết quả quen thuộc theo bất đẳng thức *AM-GM*:

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 2 Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Phân tích và định hướng lời giải

Áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta có:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{a}{b+c}} \right)^2 \left[\sum a^2(b+c) \right] \geq (a+b+c)^3$$

Ta cần chứng minh:

$$(a+b+c)^3 \geq 4[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Schur*:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \text{ và } 3abc \geq 0$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b; c=0$ và các hoán vị

Ví dụ 3 Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh:

$$4^4(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1) \geq \left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^4$$

(*Gabriel Dospinescu*)

Phân tích và định hướng lời giải

Do $abcd = 1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$4^4(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1) \geq (a+b+c+d+abc+bcd+cda+dab)^4$$

Đến lúc này thì ý tưởng khá rõ. Áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta có:

$$\sqrt[4]{(a^4+1)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)} \geq a+bcd$$

$$\sqrt[4]{(1+a^4)(b^4+1)(1+c^4)(1+d^4)} \geq b+cda$$

$$\sqrt[4]{(1+a^4)(1+b^4)(c^4+1)(1+d^4)} \geq c+dab$$

$$\sqrt[4]{(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(d^4+1)} \geq d+abc$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có:

$$4\sqrt[4]{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)} \geq a+b+c+d+abc+bcd+cda+dab$$

$$\Rightarrow 4^4(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1) \geq (a+b+c+d+abc+bcd+cda+dab)^4$$

Đây chính là điều cần phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$

Ví dụ 4 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 3c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + 3a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + 3b^2}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Cũng tương tự ví dụ , ta sẽ tìm cách khử căn thức dưới mẫu về trái bằng việc sử dụng bất đẳng thức *Holder* :

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{b^2 + 3c^2}} \right)^2 \left[\sum a(b^2 + 3c^2) \right] \geq (a+b+c)^3$$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{\sum a(b^2 + 3c^2)} \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^3 \geq 9 \sum a(b^2 + 3c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Đây là một kết quả quen thuộc theo bất đẳng thức *AM-GM*.

$$\sum a^3 + \sum a^3 + \sum b^3 \geq 3 \sum a^2 b$$

$$\sum b^3 + \sum b^3 + \sum a^3 \geq 3 \sum b^2 a$$

$$\Rightarrow \sum a^3 \geq \sum ab(a+b)$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Qua các ví dụ trên ta đã thấy được sức mạnh của bất đẳng thức *Holder* trước những bài toán có dạng phân thức: đưa bài toán từ dạng phức tạp về dạng đơn giản hơn. Bên cạnh đó, *Holder* còn rất hiệu quả đối với các dạng bất đẳng thức thông thường:

Ví dụ 5 Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}} + \sqrt{\frac{b}{1+c+ca}} + \sqrt{\frac{c}{1+a+ab}} \geq \sqrt{3}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Lời giải 1: Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a; b; c\}$

Để ý rằng dấu đẳng thức xảy ra tại 2 bộ là $a = b = c = 1$ và $a = 3; b = c = 0$. Do đó ta sẽ sử dụng bất đẳng thức *Holder* với các tham số m, n, p như sau:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{a}{1+b+bc}} \right)^2 \left[\sum a^2 (ma + nb + pc)^3 (1+b+bc) \right] \geq \left[m \sum a^2 + (n+p) \sum ab \right]^3 \quad (*)$$

Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}}{a^2 (ma + nb + pc)^3 (1+b+bc)} = \frac{\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}}{b^2 (mb + nc + pa)^3 (1+c+ca)} = \frac{\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}}}{c^2 (mc + na + pb)^3 (1+a+ab)}$$

Bây giờ ta sẽ chọn bộ số m, n, p thỏa mãn đồng thời 2 dấu bằng xảy ra. Để việc chứng minh đỡ nặng nhọc, ta sẽ chọn m, n, p sao cho $m \sum a^2 + (n+p) \sum ab$ có dạng $k(a+b+c)^2$; cụ thể : chọn $m=2, n=1, p=3$. Khi đó (*) trở thành:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{a}{1+b+bc}} \right)^2 \left[\sum a^2 (2a+b+3c)^3 (1+b+bc) \right] \geq 8(a+b+c)^6$$

Ta cần chứng minh

$$8(a+b+c)^6 \geq 3 \sum a^2 (2a+b+3c)^3 (1+b+bc) \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^7 \geq \sum a^2 \left[(a+b+c)^2 + 3b(a+b+c) + 9bc \right] (2a+b+3c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\sum ab(a^4+b^4)+26\sum a^2b^4+39\sum a^4b^2+54\sum a^3b^3+261a^2b^2c^2 \\ \geq 24\sum a^4bc+93\sum a^3b^2c+97a^2b^3c$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo bất đẳng thức *Schur* và *AM-GM*

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=3; b=c=0$ và các hoán vị

Tuy nhiên, việc biến đổi từ (***) về bất đẳng thức cuối là một bước tốn khá nhiều thời gian và chỉ cần một chút sơ suất trong việc tính toán thì toàn bộ công trình của ta sẽ "tan vào mây khói". Chúng ta hãy cùng xem xét lời giải sau:

Lời giải 2:

Sử dụng bất đẳng thức *Holder* ta có:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}\right)^2 \left[\sum a(1+b+bc)\right] \geq \left(\sum a^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3 \geq 9+3(ab+bc+ca)+9abc \\ \Leftrightarrow \sum a^2+3\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)+6(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 9+3\sum ab+9abc$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right) \geq 2\sum ab \\ \Rightarrow \sum a^2+3\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right) \geq \sum a^2+6\sum ab=9+4\sum ab$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$ab+bc+ca+6(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 9abc$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có:

$$ab + bc + ca + 6(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}} + 6(abc)^{\frac{2}{3}} = 9(abc)^{\frac{2}{3}}$$

Và từ giả thiết $a+b+c=3$ ta có

$$9(abc)^{\frac{2}{3}} = 3(a+b+c)(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 9(abc)^{\frac{2}{3}}(abc)^{\frac{2}{3}} = 9abc$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca + 6(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 9abc$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=3; b=c=0$ và các hoán vị.

Ví dụ 6 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3$$

(USAMO 2004)

Phân tích và định hướng lời giải

Cũng như ví dụ đầu tiên, một câu hỏi được đặt ra là: *Tại sao lại sử dụng bất đẳng thức Holder? - Dấu hiệu nào để nhận biết nó?*

Dễ thấy là bất đẳng thức cần chứng minh không thuần nhất, hơn nữa, các biến hoàn toàn độc lập với nhau; ý tưởng là ta sẽ "ép" các đại lượng riêng biệt $(a^5 - a^2 + 3)$; $(b^5 - b^2 + 3)$; $(c^5 - c^2 + 3)$ ra để hạ bớt số biến. Tuy nhiên, việc này không khá thi lắm bởi vì rất khó để tạo ra được các đại lượng nói trên, do đó ta sẽ đi tìm một con đường khác. Vẫn dựa trên ý tưởng ban đầu, do vai trò của a, b, c như nhau nên nếu xử lý được đại diện $(a^5 - a^2 + 3)$ thì bài toán sẽ được giải quyết. Nhận thấy dấu đẳng thức của bất đẳng thức tại $a=b=c=1$; bậc của vế phải là 3 và a, b, c độc lập với nhau. Nên ta sẽ sử dụng bất đẳng thức *Holder* như sau:

$$(a+b+c)^3 \leq (a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3)$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+a+1)(a+1) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Tương tự ta có:

$$b^5 - b^2 + 3 \geq b^3 + 2$$

$$c^5 - c^2 + 3 \geq c^3 + 2$$

Nhân vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3)$$

$$\Rightarrow (a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

Đây chính là điều cần phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 7

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geq ab + bc + ca$$

Phân tích và định hướng lời giải

Một bất đẳng thức đã được nêu lên trong cuốn *Sáng tạo bất đẳng thức* của Phạm Kim Hùng. Sau đây là lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức *Holder* ta có

$$\left(\sum \sqrt[3]{a}\right)^3 (a+b+c)^5 \geq \left(\sum a^{\frac{3}{4}}\right)^8$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}}\right)^8 \geq 3^5 (ab + bc + ca)^3 \quad (*)$$

Đặt

$$a^{\frac{3}{4}} = x; b^{\frac{3}{4}} = y; c^{\frac{3}{4}} = z$$

$$(*) \Leftrightarrow (x^3 + y^3 + z^3)^8 \geq 3^5 (x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4)^3$$

Vì đây là một bất đẳng thức thuần nhất nên ta có thể bỏ qua giả thiết đầu bài để chuẩn hóa $x^3 + y^3 + z^3 = 3$

Khi đó ta cần chứng minh

$$3 \geq x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM* thì

$$xy \leq \frac{x^3 + y^3 + 1}{3} = \frac{4 - z^3}{3}$$

$$\Rightarrow x^4 y^4 \leq \frac{4x^3 y^3 - x^3 y^3 z^3}{3}$$

$$\Rightarrow \sum x^4 y^4 \leq \frac{4 \sum x^3 y^3 - 3x^3 y^3 z^3}{3}$$

Do đó ta cần chứng minh

$$4 \sum x^3 y^3 - 3x^3 y^3 z^3 \leq 9 \quad (**)$$

Do $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ nên $(**)$ tương đương

$$4(x^3 + y^3 + z^3)(x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3) \leq 9x^3 y^3 z^3 + (x^3 + y^3 + z^3)^3$$

$$\Leftrightarrow x^9 + y^9 + z^9 + 3x^3 y^3 z^3 \geq x^3 y^3 (x^3 + y^3) + y^3 z^3 (y^3 + z^3) + z^3 x^3 (z^3 + x^3)$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur*

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 8

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})^2 \geq 27$$

Phân tích và định hướng lời giải

Khó khăn của bài toán chính là ở giả thiết của nó, do đó ta sẽ xử lý điều kiện đầu tiên. Ta có:

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow abc(a+b+c)=ab+bc+ca$$

Đặt $ab=x; bc=y; ca=z$. Khi đó bài toán trở thành:

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=xy+yz+zx \end{cases}$. Chứng minh rằng: $(x+y+z)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \geq 27$

Áp dụng bất đẳng thức *Holder* ta có

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^3$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \geq \frac{(x+y+z)^4}{x^2+y^2+z^2}$$

Ta sẽ chứng minh

$$(x+y+z)^4 \geq 27(x^2+y^2+z^2)$$

Mặt khác, từ giả thiết $x+y+z=xy+yz+zx$ ta có

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=(x+y+z)(x+y+z-2)$$

Do đó ta cần chứng minh

$$(x+y+z)^4 \geq 27(x+y+z)(x+y+z-2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 \geq 27(x+y+z)-54$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *AM-GM*

$$(x+y+z)^3 + 27 + 27 \geq 27(x+y+z)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

3. Bài tập tự giải

Bài 1 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

(Russian Mathematical Olympiad 2002)

Bài 2 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3$$

(Alexey Gladkich)

Bài 3 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}} \geq 1$$

Bài 4 Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}$$

Bài 5 Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh:

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2 \geq \frac{4}{9}$$

Bài 6 Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} + \sqrt[4]{abcd}}{4} \leq \sqrt[4]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c+d}{4}}$$

Bài 7 Cho $a, b, c \geq 0$ và $ab+bc+ca > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1 + \frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{48c}{a+b}} \geq 15$$

(Vasile Cirtoaje)

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

Đoàn Quốc Đạt - Ngô Hoàng Thanh Quang

1. Bất đẳng thức Cauchy-schwarz

1.1. Định lý

Với 2 dãy số thực tùy ý a_1, \dots, a_n và b_1, \dots, b_n ta luôn có bất đẳng thức:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước là nếu $b_k = 0$ thì $a_k = 0$

1.2. Chứng minh:

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM:

Chia cả hai vế cho $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}$ ta cần chứng minh:

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \right| \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i||b_i|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) = 1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Cách 2: Sử dụng tam thức bậc hai:

Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ thì ta có $a_1 = \dots = a_n = 0$. Khi đó bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Do

đó ta chỉ cần xét với $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$.

Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Ta thấy

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 \geq 0; \forall x \text{ nên } \Delta_f \leq 0$$

Hay

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức *Jensen*

Cũng như cách thứ 2, ta chỉ cần xét trường hợp $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$

Nhận xét: Nếu có 1 số bằng 0 thì ta có thể quy về chứng minh bất đẳng thức cho trường hợp $n-1$ biến số, và nếu vẫn còn một số nào đó bằng 0 thì ta sẽ tiến hành tương tự cho đến khi không còn số nào bằng 0.

Do đó ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $a_i \neq 0$ là đủ.

Xét $f(x) = x^2; x \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$. Do đó $f(x) = x^2$ là hàm lồi trên \mathbb{R} .

Do đó theo bất đẳng thức *Jensen*, với mọi $c_i \geq 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n c_i > 0$ và $x_i \in \mathbb{R}$, ta có

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

Suy ra

$$(c_1x_1 + \dots + c_nx_n)^2 \leq (c_1 + \dots + c_n)(c_1x_1^2 + \dots + c_nx_n^2)$$

Chọn $c_i = b_i^2; x_i = \frac{a_i}{b_i}$ ta có điều phải chứng minh

1.3. Hệ quả

Hệ quả 1.3.1. Với 2 dãy số a_1, \dots, a_n và b_1, \dots, b_n $b_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$ ta có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước là nếu $b_k = 0$ thì $a_k = 0$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* dạng *Engel*, gọi tắt là *Schwarz*

Hệ quả 1.3.2. Với 2 dãy số a_1, \dots, a_n và b_1, \dots, b_n ta có:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2}$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức *Minkowski*

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước là nếu $b_k = 0$ thì $a_k = 0$

2. Ví dụ

Bây giờ chúng ta sẽ không đề cập đến những bài toán khá cơ bản như:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1$$

Mà sẽ đi vào một số ví dụ khó hơn để thấy được vẻ đẹp của bất đẳng thức quan trọng này:

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

(BMO 2005)

Phân tích và định hướng lời giải

Bài toán này gây khó khăn cho không ít người bởi sự xuất hiện khá là "vô duyên"

của đại lượng $\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ ở vế phải. Vì thế đây là một bất đẳng thức mạnh hơn bất

đẳng thức cơ bản: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ do $a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \geq a + b + c$.

Thông thường, khi gặp những bài toán chặt như thế này, phép biến đổi tương đương luôn cho ta hiệu quả cao nhất vì không cần phải sử dụng bất kì sự đánh giá nào

tuy nhiên điều đó yêu cầu việc tính toán quá khó khăn và mất nhiều thời gian

chưa kể đến việc dễ gây ra sai sót. Vì vậy, ta sẽ đi tìm một con đường khác, một hướng suy nghĩ khác. Đầu tiên ta thấy vế trái của bất đẳng thức trên có dạng phân

thức, hơn nữa, ở vế phải sự xuất hiện của $(a-b)^2$ ở $\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ phần nào đã gợi ý

cho chúng ta sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* dạng *Engel*. Và việc cần thiết bây giờ là phải tạo được các phân thức mà tử số có dạng bình phương

Để ý rằng:

$$\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a-b)^2}{b}$$

$$\frac{b^2}{c} - 2b + c = \frac{(b-c)^2}{c}$$

$$\frac{c^2}{a} - 2c + a = \frac{(c-a)^2}{a}$$

Do đó chúng ta sẽ thêm các đại lượng $-2a+b$; $-2b+c$; $-2c+a$ ở vế trái để tạo ra các đại lượng như trên. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a &\geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} &\geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản:

$$|x| + |y| \geq |x+y|$$

Ta có $(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 = (|a-b| + |b-c| + |a-c|)^2 \geq (2|a-b|)^2 = 4(a-b)^2$

$$\Rightarrow \frac{(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2}{a+b+c} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Hay

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Kết thúc chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{|a-b|}{b} = \frac{|b-c|}{c} = \frac{|c-a|}{a} \\ (b-c)(c-a) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}b; c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b; b>0 \end{cases}$$

Ví dụ 2 Cho $a, b, c > 0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

(Phạm Hữu Đức)

Phân tích và định hướng lời giải

Ý tưởng hoàn toàn tương tự ví dụ 1, ta sẽ thêm các đại lượng $-2a + b$

; $-2b + c$; $-2c + a$ ở vế trái , bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + b - 2a + \frac{b^2}{c} + c - 2b + \frac{c^2}{a} + a - 2c &\geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} - 2(a + b + c) \\ \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} &\geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{a + b + c} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c . Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(a-c)^2}{a} \geq \frac{(|a-b| + |b-c| + |a-c|)^2}{a + b + c} = \frac{4(a-c)^2}{a + b + c}$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} 2(a-c)^2 &\geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \\ \Leftrightarrow 2(b-c)(b-a) &\leq 0 \end{aligned}$$

Điều này đúng do b là số nằm giữa a và c .

Bài toán được chứng minh .Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Ví dụ 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3c}{b(c+a)} + \frac{b^3a}{c(a+b)} + \frac{c^3b}{a(b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

(Romania 2005)

Phân tích và định hướng lời giải

Ý tưởng sử dụng *Cauchy-Schwarz* dạng *Engel* khá rõ ràng. Nhưng việc sử dụng

trực tiếp *Cauchy-Schwarz*: $\frac{a^3c}{b(c+a)} + \frac{b^3a}{c(a+b)} + \frac{c^3b}{a(b+c)} \geq \frac{(\sqrt{a^3c} + \sqrt{b^3a} + \sqrt{c^3b})^2}{2(ab+bc+ca)}$ có đem lại hiệu quả?

Chúng ta chưa biết liệu bất đẳng thức $\frac{(\sqrt{a^3c} + \sqrt{b^3a} + \sqrt{c^3b})^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$ đã đúng hay chưa

và con đường để chứng minh xem ra không đơn giản chút nào. Rõ ràng là ta vẫn

chưa sử dụng hết dữ kiện của bài toán : $a + b + c \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Đương nhiên, để sử dụng được dữ kiện này ta phải tạo ra sự xuất hiện của các đại

lượng $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{a^2}{\frac{b}{a}\left(1+\frac{a}{c}\right)} + \frac{b^2}{\frac{c}{b}\left(1+\frac{b}{a}\right)} + \frac{c^2}{\frac{a}{c}\left(1+\frac{c}{b}\right)} \geq \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\frac{a^2}{\frac{b}{a}\left(1+\frac{a}{c}\right)} + \frac{b^2}{\frac{c}{b}\left(1+\frac{b}{a}\right)} + \frac{c^2}{\frac{a}{c}\left(1+\frac{c}{b}\right)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}$$

Ta cần chứng minh

$$2(a+b+c)^2 \geq 3\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Mặt khác ta có:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq 3\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}\right) = 3\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

Và theo giả thiết $a+b+c \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Nên

$$3\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq (a+b+c)^2 + 3(a+b+c)$$

Do đó bài toán sẽ được chứng minh nếu

$$2(a+b+c)^2 \geq (a+b+c)^2 + 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b+c-3) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì theo *AM-GM* và điều kiện bài toán ta có:

$$a+b+c \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Ví dụ 4 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$16(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 5(a+b+c+1)^2$$

Phân tích và định hướng lời giải

Đây là một bất đẳng thức không thuần nhất và các biến hoàn toàn độc lập với nhau, do đó ta sẽ tìm cách đánh giá để số biến giảm đi. Tức là nếu sử dụng *Cauchy*-

Schwarz sao cho 1 trong 3 đại lượng $(b^2 + 1)$; $(c^2 + 1)$; $(a^2 + 1)$ xuất hiện thì khi đó công việc chứng minh bất đẳng thức ban đầu sẽ được quy về chứng minh một bất đẳng thức chỉ còn 2 biến, hiển nhiên việc chứng minh sẽ đỡ nặng nhọc và dễ dàng hơn. Việc bây giờ cần làm là nhóm các số hạng 1 cách phù hợp.

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$5(a+b+c+1)^2 \leq 5[(b+c+1)^2 + 1](1+a^2)$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} 5[(b+c+1)^2 + 1] &\leq 16(b^2 + 1)(c^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 16b^2c^2 - 10bc + 11(b^2 + c^2) - 10(b+c) + 6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sử dụng *Cauchy-Schwarz*:

$$\begin{aligned} 10(b^2 + c^2) &\geq 5(b+c)^2 \\ \Rightarrow 16b^2c^2 - 10bc + 11(b^2 + c^2) - 10(b+c) + 6 &\geq (4bc-1)^2 + (b-c)^2 + 5(b+c-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} b-c=0 \\ 4bc-1=0 \\ b+c-1=0 \\ \frac{b+c+1}{1} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$$

Đôi khi, các bài toán sử dụng cách chứng minh trên sẽ không lộ rõ như thế mà phải qua một số bước biến đổi, cái chúng ta cần mới hiện ra:

Ví dụ 5 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$2(1+abc) + \sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

Phân tích và định hướng lời giải

Việc xuất hiện của $\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$ làm cho bài toán khá là rắc rối, chính vì vậy, ta sẽ chuyển nó sang một vế, sau đó bình phương cả 2 vế lên để khử đi căn thức. Dựa trên ý tưởng đó, bất đẳng thức có thể viết lại thành:

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq a+b+c+ab+bc+ca-(abc+1)$$

Nếu $a+b+c+ab+bc+ca-(abc+1) \leq 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng do

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq \sqrt{2}$$

Nếu $a+b+c+ab+bc+ca-(abc+1) > 0$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (a+b+c+ab+bc+ca-abc-1)^2$$

Cũng như bài trước, ta sẽ sử dụng *Cauchy-Schwarz* để giảm bớt số biến đi, cụ thể:

$$[a(b+c+1-bc) + (b+c+bc-1)]^2 \leq (a^2+1)[(b+c+1-bc)^2 + (b+c+bc-1)^2]$$

Do đó ta cần chứng minh

$$2(1+b^2)(1+c^2) \geq (b+c+1-bc)^2 + (b+c+bc-1)^2$$

Nhưng thực chất đây chỉ là một hằng đẳng thức.

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Nhận xét: Cách đánh giá trên khá là hiệu quả trong việc chứng minh một lớp các bất đẳng thức mà các biến độc lập với nhau. Thế nhưng, đó chẳng qua chỉ là một trường hợp đặc biệt trong thế giới bất đẳng thức. Đối với các dạng khác thì việc sử dụng nó hoàn toàn không khả thi, chúng ta hãy cùng xem xét ví dụ dưới đây:

Ví dụ 6 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{4} (a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2$$

Phân tích và định hướng lời giải

Rõ ràng, trong bài toán này, chúng ta không thể biến đổi để đưa về một bất đẳng thức mà các biến độc lập với nhau; do đó ta sẽ đi tìm con đường chứng minh khác. Nhận thấy rằng nếu ta sẽ sử dụng *Cauchy-Schwarz* sao cho biểu thức sau khi đánh giá có sự xuất hiện của $(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2$ thì bài toán sẽ không còn khó khăn nữa, công việc chứng minh hoàn toàn sẽ nhẹ nhàng hơn.

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} = \frac{a^3}{a^2b^2+a^2} + \frac{b^3}{b^2c^2+b^2} + \frac{c^3}{c^2a^2+c^2} \geq \frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Do đó bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra:

$$\frac{1}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Bất đẳng thức cuối là một kết quả của bất đẳng thức quen thuộc:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Nhận xét: Việc sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* cho một vế (thường là vế phức tạp hơn) sao cho biểu thức sau khi đánh giá có sự xuất hiện của một đại lượng liên quan đến vế còn lại thì sẽ giúp việc chứng minh nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Ví dụ 7 Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

(British Mathematical Olympiad 2005)

Phân tích và định hướng lời giải

Như đã nói ở trên, chúng ta sẽ đánh giá sao cho ở vế trái xuất hiện các đại lượng liên quan đến vế phải, cụ thể là ta sẽ tạo ra sự có mặt của $a+b+c$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^2 \quad (1)$$

Và

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \quad (2)$$

Nhân vế theo vế (1) và (2) ta có

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq \left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right]^2$$

Ta cần chứng minh

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

Nhưng thực chất đây chỉ là một hằng đẳng thức.

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Ví dụ 8 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0$$

(International Mathematic Olympiad 2005)

Phân tích và định hướng lời giải

Do $\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} = 1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^2 + c^2}$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bây giờ chúng ta cần sử dụng *Cauchy-Schwarz* sao cho các phân thức $\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2}$;

$\frac{1}{b^5 + c^2 + a^2}$; $\frac{1}{c^5 + a^2 + b^2}$ về chung một đại lượng liên quan đến vế phải, cụ thể là phân thức có mẫu là $a^2 + b^2 + c^2$.

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} = \frac{\frac{1}{a} + b^2 + c^2}{(a^5 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a} + b^2 + c^2 \right)} \leq \frac{\frac{1}{a} + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Cộng bất đẳng thức này với các bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\sum \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2(b^2 + c^2 + a^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2 \leq 3(b^2 + c^2 + a^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab + bc + ca}{abc} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Điều này đúng do

$$abc \geq 1 \Rightarrow \frac{ab + bc + ca}{abc} \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 9 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+1}{a+b^2+c^3} + \frac{b+c+1}{b+c^2+a^3} + \frac{c+a+1}{c+a^2+b^3} \leq \frac{1+(a+1)(b+1)(c+1)}{a+b+c}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Mặc dù trông có vẻ phức tạp và rắc rối nhưng thực ra bài này cùng chung một ý tưởng chứng minh với 2 bài vừa rồi

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$(a+b^2+c^3)\left(a+1+\frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+1}{a+b^2+c^3} \leq \frac{(a+b+1)\left(a+1+\frac{1}{c}\right)}{(a+b+c)^2}$$

Cộng các bất đẳng thức tương tự lại, ta cần chứng minh

$$\sum (a+b+1) \left(a+1+\frac{1}{c} \right) \leq (a+b+c) [(a+1)(b+1)(c+1)+1]$$

Thế nhưng đây thực ra chỉ là một hằng đẳng thức do $abc=1$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Bây giờ chúng ta sẽ đi đến một kĩ thuật chứng minh khác: *Kĩ thuật đổi biến*.

Một câu hỏi được đặt ra là *Tại sao lại phải đổi biến? Nếu không đổi biến thì có được không*. Để tìm kiếm câu trả lời, ta sẽ xem qua ví dụ dưới đây:

Ví dụ 10 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq 1$$

Phân tích và định hướng lời giải:

Sai lầm thường gặp khi gặp bài này đó là việc sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* một cách thông thường:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)}$$

sẽ dẫn đến một kết quả sai do

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)} \geq 1 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq a^2+b^2+c^2 ?? .$$

Rõ ràng là việc sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* trực tiếp như vậy sẽ không thể áp dụng trong trường hợp này. Ta sẽ cần một chút biến đổi sáng tạo để công việc chứng minh hiệu quả hơn. Để ý rằng nếu chia

$a^2 + ab + b^2; b^2 + bc + c^2; c^2 + ca + a^2$ tương ứng cho $a^2; b^2; c^2$ thì sẽ xuất hiện các đại lượng $\frac{b}{a}; \frac{c}{b}; \frac{a}{c}$ và nếu đặt $x = \frac{b}{a}; y = \frac{c}{b}; z = \frac{a}{c}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh bây giờ là

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} \geq 1$$

và khi đó ta có $xyz = 1$

Vậy là từ các biến độc lập hoàn toàn, ta đã biến đổi được về các biến phụ có mối quan hệ mật thiết với nhau. Việc đưa được về biến phụ như vậy vô cùng quan trọng, nó là một bước tiến lớn trong việc định hướng tới ý tưởng đổi biến. Vì $xyz = 1$ nên

ta đổi biến $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{np}{m^2}, \frac{mp}{n^2}, \frac{mn}{p^2} \right)$; trong đó $m, n, p > 0$

Bất đẳng thức được viết lại thành :

$$\frac{m^4}{m^4 + m^2 np + n^2 p^2} + \frac{n^4}{n^4 + mn^2 p + m^2 p^2} + \frac{p^4}{p^4 + mnp^2 + m^2 n^2} \geq 1 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$VT(1) \geq \frac{(m^2 + n^2 + p^2)^2}{\sum m^4 + \sum m^2 n^2 + mnp(m + n + p)}.$$

Do đó, bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra:

$$\begin{aligned} (\sum m^2)^2 &\geq \sum m^4 + \sum m^2 n^2 + mnp(m + n + p) \\ \Leftrightarrow \sum m^2 n^2 &\geq mnp(m + n + p) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối là một kết quả quen thuộc:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

📖 Rõ ràng là trong nhiều trường hợp, việc sử dụng *Cauchy-Schwarz* một cách thông thường sẽ không thể giải quyết được bài toán, hoặc nếu giải quyết được thì cũng sẽ khá vất vả. Lúc đó, các phép đổi biến luôn là một giải pháp tốt.

Thông thường, với các bất đẳng thức 3 biến a, b, c thì các phép đổi biến thường được sử dụng là:

$$\text{I.} \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{II.} \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{ka}{b}, \frac{kb}{c}, \frac{kc}{a} \right)$$

$$\text{III.} \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{kb}{a}, \frac{kc}{b}, \frac{ka}{c} \right)$$

$$\text{IV.} \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{kbc}{a^2}, \frac{kca}{b^2}, \frac{kab}{c^2} \right)$$

$$\text{V.} \quad (a, b, c) \mapsto \left(\frac{ka^2}{bc}, \frac{kb^2}{ca}, \frac{kc^2}{ab} \right)$$

Trong ví dụ 10 ta đã sử dụng phép đổi biến (V) với $k=1$

Ví dụ 11 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b} \right)^2 + \left(\frac{b}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{c}{c+a} \right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

Phân tích và định hướng lời giải:

Thông thường, ta sẽ nghĩ đến việc hạ bậc của biểu thức về bên trái bằng cách sử dụng *Cauchy-Schwarz*:

$$\left[\left(\frac{a}{a+b} \right)^2 + \left(\frac{b}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{c}{c+a} \right)^2 \right] (1+1+1) \geq \left(\sum \frac{a}{a+b} \right)^2$$

và khi đó cần chứng minh

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức này có dạng "khá giống" với bất đẳng thức *Nesbitt* nổi tiếng nhưng rất tiếc là tính đúng đắn của nó lại không được như thế. Trong trường hợp $a \geq c \geq b$ hoặc $c \geq b \geq a$ thì bất đẳng thức hoàn toàn bị ngược dấu. Đến đây, ta sẽ nghĩ đến việc sử dụng kỹ thuật đổi biến như **ví dụ 10** vừa rồi. Đặt $x = \frac{b}{a}; y = \frac{c}{b}; z = \frac{a}{c}$ khi đó $xyz = 1$ và bất đẳng thức ban đầu tương đương:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4} \quad (1)$$

Vì $xyz = 1$ nên ta đổi biến $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{np}{m^2}, \frac{mp}{n^2}, \frac{mn}{p^2}\right)$, trong đó $m, n, p > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \sum \frac{m^4}{m^4 + 2m^2np + n^2p^2} \geq \frac{3}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$\sum \frac{m^4}{m^4 + 2m^2np + n^2p^2} \geq \frac{(\sum m^2)^2}{\sum m^4 + 2mnp \sum m + \sum m^2n^2}$$

Ta cần chứng minh

$$4(\sum m^2)^2 \geq 3(\sum m^4 + 2mnp \sum m + \sum m^2n^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum m^4 + 5\sum m^2n^2 \geq 6mnp(m+n+p)$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo 2 bất đẳng thức cơ bản sau:

$$m^4 + n^4 + p^4 \geq m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2$$

và

$$m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2 \geq mnp(m+n+p)$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 12 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Do bất đẳng thức trên không thuần nhất nên rõ ràng lớn nhất của chúng ta chính là đại lượng $1+abc$ dưới mẫu ở vế phải. Do đó ta sẽ tìm cách để "khử" đại lượng này; cách hiệu quả nhất trong trường hợp này là ý tưởng đổi biến $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{kx}{y}, \frac{ky}{z}, \frac{kz}{y}\right)$

. trong đó $k > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{zy}{xy+kxz} + \frac{xz}{yz+kxy} + \frac{xy}{zx+kzy} \geq \frac{3k}{1+k^3} \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$VT(1) = \sum \frac{z^2 y^2}{xy^2 z + kxyz^2} \geq \frac{(\sum xy)^2}{(1+k)[xyz(x+y+z)]}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(\sum xy)^2}{(1+k)[xyz(x+y+z)]} \geq \frac{3k}{1+k^3}$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - k + 1)(\sum xy)^2 \geq 3kxyz(x+y+z)$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$(xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

và

$$k^2 - k + 1 \geq k \Leftrightarrow (k-1)^2 \geq 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ và $k = 1$ hay $a = b = c$

Bây giờ chúng ta sẽ đến với một kĩ thuật không thể thiếu khi sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*: *Kĩ thuật thêm-bớt*. Ý tưởng khá đơn giản: để chứng minh một bất đẳng thức có dạng $f(a, b, c) \geq g(a, b, c)$ mà việc chứng minh thông thường có lẽ sẽ không đem lại hiệu quả thì khi đó ta sẽ tìm 1 biểu thức $h(a, b, c) \leq f(a, b, c)$ sao cho $f(a, b, c) - h(a, b, c) \geq g(a, b, c) - h(a, b, c)$. Và đánh giá này càng chặt càng tốt. $h(a, b, c)$ trong một số trường hợp có thể là các số, cũng có thể là các biểu thức liên quan tới biến. Để rõ hơn về kĩ thuật này, ta sẽ xem xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 13 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + ca + a^2} \leq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}$$

Phân tích và định hướng lời giải:

Không ít bạn khi nhìn vào bài toán này sẽ nghĩ ngay đến phương pháp *S.O.S*; nhưng bài này hoàn toàn có thể giải được chỉ với *kĩ thuật thêm -bớt* nói trên. Nhận thấy về trái của bất đẳng thức có dạng phân thức- một dấu hiệu để chúng ta nghĩ đến việc sử dụng *Cauchy-Schwarz* dạng $\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}$; thế nhưng chiều của nó lại là \leq chứ không phải \geq như mong muốn. Do đó ta nghĩ đến việc đổi chiều bất đẳng thức lại bằng việc thêm bớt 2 vế với một số thực $k > 0$. Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành:

$$\sum \left(k - \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) \geq 3k - \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum \left[\frac{(k-1)a^2 + kab + (k-1)b^2}{a^2 + ab + b^2} \right] \geq 3 \left[\frac{(k-2) \sum a^2 + 2k \sum ab}{(a+b+c)^2} \right]$$

Để đảm bảo việc sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* hiệu quả và an toàn nhất, chúng ta phải tìm số k sao cho $(k-1)a^2 + kab + (k-1)b^2$; $(k-1)b^2 + kbc + (k-1)c^2$; $(k-1)c^2 + kca + (k-1)a^2$ đều là các số không âm. Để chắc chắn

$$(k-1)a^2 + kab + (k-1)b^2 \geq 0 \quad \text{với } \forall a, b > 0 \quad \text{thì} \quad \begin{cases} \Delta = k^2 - 4(k-1)^2 \leq 0 \\ k-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 2$$

Trong trường hợp này hằng số k tốt nhất chính là hằng số nhỏ nhất. Vậy ta sẽ chọn $k=2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum \frac{(a+b)^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\sum \frac{(a+b)^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2 \sum a^2 + \sum ab}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{4(a+b+c)^2}{2 \sum a^2 + \sum ab} \geq \frac{12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Hay

$$(a+b+c)^4 \geq 3(\sum ab)(2 \sum a^2 + \sum ab)$$

Bất đẳng thức này đúng theo *AM-GM*:

$$3(\sum ab)(2 \sum a^2 + \sum ab) \leq \frac{3 \sum ab + 2 \sum a^2 + \sum ab}{4} = \frac{[2(a+b+c)^2]}{4} = (a+b+c)^4$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 14 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{1}{4c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích và định hướng lời giải

Lời giải 1: Để ý rằng $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4a^2 + b^2 + c^2} = 1 - \frac{3a^2}{4a^2 + b^2 + c^2}$; chính chi tiết này đã phần nào

khơi gợi ý tưởng trong ta: nhân cả 2 vế với $a^2 + b^2 + c^2$. khi đó bất đẳng thức cần chứng minh là:

$$\sum \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

hay

$$3 \sum \frac{a^2}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\sum \frac{a^2}{4a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sum (4a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{3}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Và theo bất đẳng thức *AM-GM*:

$$\frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geq 3$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$a = b = c = 1$$

Lời giải 2: Do bậc của 2 vế lệch nhau nên ta sẽ nghĩ đến việc đồng bậc bất đẳng thức như sau: Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$\frac{(a + b + c)^2}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a + b + c)^2}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a + b + c)^2}{4c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{9}{2}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2}$$

Cộng các bất đẳng thức tương tự lại với nhau, ta có

$$\sum \frac{(a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2} \leq \sum \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) = \sum \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{b^2+a^2} \right) = \frac{9}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Bên cạnh việc thêm bớt thì lời giải 2 của ví dụ vừa rồi đã sử dụng một kĩ thuật khác song song và không thể thiếu trong việc sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* : kĩ thuật tách ghép.

Ví dụ 15 Cho a, b, c dương . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{2a+c} + \frac{1}{2b+a} + \frac{1}{2c+b} \right) + 1 \geq 2 \left(\frac{a+b}{2b+a} + \frac{b+c}{2c+b} + \frac{a+c}{2a+c} \right)$$

(*diendantoanhoc.net*)

Phân tích và định hướng lời giải:

Điểm khó khăn của bài toán này chính là sự hiện diện hệ số tự do về trái, trong khi đó về phải lại là một biểu thức chứa biến khá phức tạp. Ý tưởng của ta bây giờ là phải loại bỏ được số 1 đó; một ý nghĩ khá tự nhiên đó là tạo ra hệ số tự do ở về phải.

Để ý rằng $\frac{a+b}{2b+a} = 1 + \frac{a}{2b+a}$. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại

thành:

$$\sum \frac{a+b+c}{2b+a} \geq 2 + \sum \frac{b}{2b+a}$$

$$\Leftrightarrow \sum \left(\frac{a+b+c}{2b+a} - \frac{b}{2b+a} \right) \geq 2$$

hay

$$\frac{b+c}{2b+a} + \frac{c+a}{2c+b} + \frac{a+b}{2a+c} \geq 2. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$VT(1) \geq \frac{[\sum(a+c)]^2}{\sum[(2b+a)(a+c)]}$$

Ta cần chứng minh

$$4(a+b+c)^2 \geq 2\sum[(2b+a)(a+c)] \quad \text{hay} \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Bất đẳng thức cuối là một kết quả quen thuộc. Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 16 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích và định hướng lời giải

Lời giải 1: Cũng như những bài trước, ta sẽ nghĩ đến việc sử dụng một số $k > 0$ và biến đổi bất đẳng thức về dạng

$$\sum \left(k - \frac{1}{1-ab} \right) \geq 3k - \frac{9}{2}$$

Hay

$$\sum \left(\frac{k-1-kab}{1-ab} \right) \geq 3 \left(k - \frac{3}{2} \right)$$

Ta cần tìm số k sao cho $k-1-kab \geq 0$, và đánh giá này càng chặt càng tốt. Bằng bất đẳng thức *AM-GM*, ta có $1=a^2+b^2+c^2 \geq 2ab+c^2 > 2ab$, do đó ta sẽ chọn $k=2$.

Khi đó, ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1-2ab}{1-ab} + \frac{1-2bc}{1-bc} + \frac{1-2ca}{1-ca} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{c^2}{1-ab} + \sum \frac{(a-b)^2}{1-ab} \geq \frac{3}{2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\sum \frac{c^2}{1-ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3-(ab+bc+ca)}$$

$$\sum \frac{(a-b)^2}{1-ab} \geq \frac{(a-b+b-c+a-c)^2}{3-(ab+bc+ca)} = \frac{4(a-c)^2}{3-(ab+bc+ca)}$$

Do đó ta cần chứng minh

$$2[4(a-c)^2 + (a+b+c)^2] \geq 3[3-(ab+bc+ca)] \quad (1)$$

Đồng bậc bất đẳng thức:

$$(1) \Leftrightarrow 2[4(a-c)^2 + (a+b+c)^2] \geq 3[(a^2+b^2+c^2) - 3(ab+bc+ca)]$$

$$\Leftrightarrow 7b(a-b)(a-c) + (a-c)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a \geq b \geq c$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải 2: Cách giải trên là một cách giải mang đậm tính kỹ thuật thêm bớt, tuy nhiên cách giải trên chưa phải là ngắn nhất. Bây giờ chúng ta sẽ tìm một lời giải ngắn hơn thông qua kỹ thuật tách ghép: Về trái của bất đẳng thức có dạng phân thức và chiều của bất đẳng thức là \leq . Điều này gợi ý cho ta nghĩ đến việc sử dụng bất

đẳng thức *Cauchy-Schwarz* dạng $\frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n}$. Nếu sử dụng *AM-GM*

:

$$\frac{1}{1-ab} \leq \frac{1}{1-\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{2}{(1-a^2)+(1-b^2)}$$

rồi sử dụng *Cauchy-Schwarz*:

$$\frac{2}{(1-a^2)+(1-b^2)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \right)$$

Khi đó công việc chứng minh sẽ hoàn tất nếu như chỉ ra được

$$\sum \frac{1}{1-a^2} \leq \frac{9}{2}$$

Tuy nhiên chiều của bất đẳng thức này lại ngược lại do:

$$\sum \frac{1}{1-a^2} \geq \frac{9}{3-(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{2}$$

Vậy, ý tưởng trên đã không cho kết quả như mong muốn; chúng ta sẽ lại tiếp tục đi tìm một con đường mới: Muốn sử dụng được bất đẳng thức

$$\frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \text{ thì ta phải có đại lượng bình phương ở tử của phân thức.}$$

Vì con đường trên không thành công khi đại lượng trên tử là hệ số tự do nên bây giờ ta sẽ thử đại lượng bình phương liên quan tới các biến. Do $\frac{1}{1-ab} - 1 = \frac{ab}{1-ab}$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{4ab}{1+c^2+(a-b)^2} \leq 3$$

Mặt khác ta có $4ab \leq (a+b)^2$ nên

$$\sum \frac{4ab}{1+c^2+(a-b)^2} \leq \sum \frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2}$$

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$\frac{(c+a)^2}{(b^2+c^2)+(b^2+a^2)} \leq \frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = 3$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 17 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b}{c^2+ab} + \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ac}$$

(Hojoo Lee)

Phân tích và định hướng lời giải

Ý tưởng như bài trên, ta sẽ tạo ra đại lượng bình phương ở tử của phân thức về bên phải, sau đó dùng kĩ thuật tách ghép phù hợp. Theo bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{(a+b)^2}{b(c^2+a^2)+a(b^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b+c}{a^2+bc} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{c(c^2+a^2)}$$

$$\frac{c+a}{b^2+ac} \leq \frac{c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \sum \left[\frac{a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{c^2}{c(c^2+a^2)} \right] = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Trong một số trường hợp, ngoài phát hiện ra dấu hiệu để tách ghép, chúng ta cần phải tinh tế và khéo léo sử dụng kĩ thuật này sao cho việc chứng minh trở nên đơn giản nhất. Chẳng hạn như ví dụ dưới đây:

Ví dụ 18 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Do $\frac{a}{a+bc} = 1 - \frac{bc}{a+bc}$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$\frac{bc}{a+bc} + \frac{ca}{b+ca} + \frac{ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{(a+b+c)a+3bc} + \frac{ca}{(a+b+c)b+3ca} + \frac{ab}{(a+b+c)c+3ab} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{bc}{a^2+2bc+(ab+ac+bc)} \leq \frac{1}{2}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\frac{bc}{a^2+2bc+(ab+ac+bc)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{ab+bc+ca} + \frac{bc}{a^2+2bc} \right)$$

$$\Rightarrow \sum \frac{bc}{a^2+2bc+(ab+ac+bc)} \leq \frac{1}{4} \left(\sum \frac{bc}{ab+bc+ca} + \sum \frac{bc}{a^2+2bc} \right)$$

Do $\sum \frac{bc}{ab+bc+ca} = 1$ nên ta cần chứng minh

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2bc}{a^2+2bc} + \frac{2ca}{b^2+2ca} + \frac{2ab}{c^2+2ab} \leq 2$$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Nhận xét: Điểm mấu chốt của lời giải trên chính là việc tách khá kĩ thuật:

$$\frac{bc}{a^2+2bc+(ab+ac+bc)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{ab+bc+ca} + \frac{bc}{a^2+2bc} \right).$$

Bởi vì nếu tách thông thường: $\frac{bc}{a^2+2bc+(ab+ac+bc)} \leq \frac{1}{36} \left(\frac{bc}{a^2} + 3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right)$ sẽ làm

cho việc chứng minh đi vào ngõ cụt.

Ví dụ 19 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}} + \frac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+4}} + \frac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+4}} \leq \frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$$

(*Internatinonal Mathematical Archimede Olympiad 2010*)

Phân tích và định hướng lời giải

Bổ đề: Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=2$, ta có:

$$\frac{bc}{a+2} + \frac{ca}{b+2} + \frac{ab}{c+2} \leq \frac{1}{2}$$

Chứng minh:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{bc}{a+b+a+c} + \frac{ca}{b+a+c+b} + \frac{ab}{c+b+a+c} \leq \frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\frac{bc}{a+b+a+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{c+a} \right)$$

$$\frac{ca}{b+a+c+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{a+b} + \frac{ca}{b+c} \right)$$

$$\frac{ab}{c+b+a+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{c+a} \right)$$

$$\Rightarrow \sum \frac{bc}{a+b+a+c} \leq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{c+a} \right) = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{a+b} \right) = \frac{a+b+c}{4} = \frac{1}{2}$$

Bỏ đề được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Trở lại bài toán:

Để cho đơn giản, ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại thành:

$$\frac{bc}{\sqrt[4]{9a^2+12}} + \frac{ca}{\sqrt[4]{9b^2+12}} + \frac{ab}{\sqrt[4]{9c^2+12}} \leq \frac{2}{3}$$

Trở ngại lớn nhất khi đứng trước bài toán này chính là sự hiện diện của $\sqrt[4]{}$ ở mẫu. Do đó, ý nghĩ đơn giản là phải làm sao để loại bỏ nó đi, hoặc là tăng bậc của nó lên.

Dễ đoán được dấu đẳng thức của bài toán xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$. Mặt khác ta thấy

$$\frac{9a^2}{12} = \frac{9\left(\frac{2}{3}\right)^2}{12} = \frac{1}{3} \text{ nên ta dự đoán rằng, nếu biến đổi hợp lí thì bất đẳng thức có thể}$$

đưa được về dạng $\frac{bc}{a+2} + \frac{ca}{b+2} + \frac{ab}{c+2} \leq \frac{1}{2}$. Dựa trên ý tưởng đó ta sẽ giải quyết bài toán như sau:

Đặt

$$A = \frac{bc}{\sqrt[4]{9a^2+12}} + \frac{ca}{\sqrt[4]{9b^2+12}} + \frac{ab}{\sqrt[4]{9c^2+12}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt[4]{4}} = \frac{bc}{\sqrt[4]{4(9a^2+12)}} + \frac{ca}{\sqrt[4]{4(9b^2+12)}} + \frac{ab}{\sqrt[4]{4(9c^2+12)}} .$$

Khi đó, theo bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$(9a^2+12)(1+3) \geq (3a+6)^2$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt[4]{4}} \leq \sum \frac{bc}{\sqrt{3a+6}} = \sum \frac{bc}{\sqrt{3(a+2)}}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\left(\sum \frac{bc}{\sqrt{3(a+2)}} \right)^2 \leq \left(\frac{bc+ca+ab}{3} \right) \left(\frac{bc}{a+2} + \frac{ca}{b+2} + \frac{ab}{c+2} \right)$$

Áp dụng bổ đề và bất đẳng thức cơ bản $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 4$, ta có

$$\left(\sum \frac{bc}{\sqrt{3(a+2)}} \right)^2 \leq \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A}{\sqrt[4]{4}} \right)^2 \leq \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{2}{3}$$

Hay

$$\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}} + \frac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+4}} + \frac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+4}} \leq \frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$$

Đây chính là điều cần phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Trong thế giới bất đẳng thức, nếu để ý, ta sẽ thấy rằng các bất đẳng thức kinh điển như *AM-GM*, *Cauchy-Schwarz*, *Chebyshev*, *Holder*, *Minkowski*,... hay là các bất đẳng thức hiện đại như *Muirhead*, *S.O.S*,... khi sử dụng để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng đem lại hiệu quả rất cao thế nhưng khi chạm chán với các bất đẳng thức dạng hoán vị vòng quanh thì chưa hẳn như vậy. Do đó, trong nhiều bài toán, chúng ta thường nghĩ đến việc đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng đối xứng. Trong

những phương pháp sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, có một phương pháp rất hiệu quả, đó là : *kỹ thuật Đối xứng hóa*.

Để mở đầu kỹ thuật này, ta sẽ đến với một bài toán khá nổi tiếng sau:

Ví dụ 20 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Vasile Cirtoaje)

Phân tích và định hướng lời giải

Đây là một bất đẳng thức dạng hoán vị vòng quanh, do đó việc chứng minh sẽ khá khó khăn. Như đã nói ở trên, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* để đưa bất đẳng thức này về dạng đối xứng. Cụ thể:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{2a}{a+b}} \right)^2 \leq \left[\sum (a+c) \right] \left[\sum \frac{a}{(a+b)(a+c)} \right] = \frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ac) \geq 9abc$$

Đây là một kết quả quen thuộc. Bài toán được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra

khi $a=b=c$

Ví dụ 21 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}(a+b+c)$$

(Phạm Kim Hùng)

Phân tích và định hướng lời giải

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có:

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b}} \right)^2 \leq \left[\sum a(a+2c) \right] \left[\sum \frac{a}{(a+2b)(a+2c)} \right]$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{a(a+b+c)^2}{(a+2b)(a+2c)} \leq \frac{3(a+b+c)}{2}$$

Ta có

$$\frac{a(a+b+c)^2}{(a+2b)(a+2c)} = a + \frac{a(b-c)^2}{(a+2b)(a+2c)} \leq a + \frac{a(b-c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

nên

$$\sum \frac{a(a+b+c)^2}{(a+2b)(a+2c)} \leq (a+b+c) + \sum \frac{a(b-c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Mà

$$(a+b+c) + \sum \frac{a(b-c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \sum a + \frac{(\sum a)(\sum ab) - 9abc}{2\sum ab} \leq \sum a + \frac{(\sum a)(\sum ab)}{2\sum ab} = \frac{3}{2} \sum a$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức không xảy ra

Sau khi trải qua những bài toán, ví dụ cụ thể trên ta có thể thấy được thế giới bất đẳng thức thật phong phú, kì ảo, các phương pháp cũng như kĩ thuật cũng rất nhiều, những ví dụ vừa qua chỉ là những ví dụ của các phương pháp nổi bật và quan trọng mà ta cần biết. Để kết thúc bài viết này, chúng ta hãy đến với một bài toán nổi tiếng và rất khó sau đây:

Ví dụ 22 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ac > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}$$

(Jack Garfunket)

Phân tích và định hướng lời giải

Đây là một bất đẳng thức rất khó và có nhiều ứng dụng của *Jack Garfunket*, hiện có 3 lời giải cho bài toán này. Ngoài lời giải của tác giả, xin trích dẫn lời giải của Võ Quốc Bá Cẩn-SV lớp YY0647A1, Khóa 32, ĐH Y Dược Cần Thơ:

Bất đẳng thức này có đẳng thức xảy ra tại $a = 3b; c = 0$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận thấy cái khó của bất đẳng thức này chính là ở chỗ nó có chứa căn thức, vì vậy ra sẽ tìm cách dùng *Cauchy-Schwarz* để loại bỏ căn thức.

Từ đó bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn. Hơn nữa ta cũng phải thêm vào các tham số thích hợp. Thế nhưng, như vừa chỉ ra ở trên, ta không thể thêm vào các tham số cố định khi đánh giá bất đẳng thức này. Vì vậy ta sẽ dùng các tham số *chạy*. Cụ thể là ta sẽ thêm vào các đại lượng có dạng $ma + nb + pc; mb + nc + pa; mc + na + pb$ với $m, n, p \geq 0$.

Ta áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* như sau:

$$VT^2 \leq \left[\sum a(ma + nb + pc) \right] \left[\sum \frac{a}{(a+b)(ma + nb + pc)} \right] \quad (*)$$

Đánh giá này xảy ra dấu bằng khi

$$\frac{\frac{a}{(a+b)(ma+nb+pc)}}{a(ma+nb+pc)} = \frac{\frac{b}{(b+c)(mb+nc+pa)}}{b(mb+nc+pa)} = \frac{\frac{c}{(c+a)(mc+na+pb)}}{c(mc+na+pb)}$$

Mặt khác, do ta dự đoán được $c=0$ nên ta cần tìm m,n,p thỏa mãn

$$\frac{\frac{a}{(a+b)(ma+nb+pc)}}{a(ma+nb+pc)} = \frac{\frac{b}{(b+c)(mb+nc+pa)}}{b(mb+nc+pa)} \text{ và } a=3b \quad (1)$$

Mặt khác, ta muốn rút gọn được đại lượng $a+b+c$ có sẵn ở vế phải nên ta sẽ tìm m,n,p sao cho $\sum a(ma+nb+pc)$ có dạng $k(a+b+c)^2$. Do đó ta sẽ chọn m,n,p sao cho $n+p=2m$ (2)

$$\text{Từ (1) và (3) ta tính được } \begin{cases} m=5 \\ n=1 \\ p=9 \end{cases} \text{ .Thay vào (*) ta có}$$

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \leq \left[\sum a(5a+b+9c) \right] \left[\sum \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \right]$$

Do đó ta cần chứng minh được

$$\left[\sum a(5a+b+9c) \right] \left[\sum \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \right] \leq \frac{25}{16} (a+b+c)$$

hay

$$(a+b+c) \left[\sum \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \right] \leq \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sum ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 + 232abc \sum a^3 + 243abc \sum a^2b + 835abc \sum ab^2 + 1230a^2b^2c^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=3b; c=0$ và các hoán vị tương ứng

3. Bài tập tự giải

Bài 1. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z} \geq \frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z}$$

Bài 2. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leq \frac{9}{4}$$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq 3$$

Bài 4. Cho các số thực x, y, z khác 1 thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geq 1$$

(IMO 2008)

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3} + \frac{b}{b^2+c^3+a^3} + \frac{c}{c^2+a^3+b^3} \geq 1$$

(Turkey Junior National Olympiad 2012)

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

(Belarusian Mathematical Olympiad 1998)

Bài 7. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2+b^3 \geq a^3+b^4$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3 \leq a^2+b^2 \leq a+b \leq 2$$

Bài 8. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \leq 2 + abc$$

(IMO Shortlist Poland)

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a+b} + \frac{b^2c}{2b+c} + \frac{c^2a}{2c+a} \leq 1$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq 1$$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b + c}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c + a}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a + b}} \leq \sqrt{3}$$

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}} \geq \frac{4}{3}$$

(APMO 2005)

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 14. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}} + \frac{1}{b\sqrt{3b+2c}} + \frac{1}{c\sqrt{3c+2a}} \geq \frac{3}{\sqrt{5abc}}$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a + b + c}$$

Bài 17. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\frac{1}{5 - 6ab} + \frac{1}{5 - 6bc} + \frac{1}{5 - 6ca} \leq 1$$

Bài 18. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2} \leq \frac{3}{4}$$

Bài 19. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$$

(Japanese Mathematical Olympiad 2004)

Bài 20. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{3b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{3c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 21. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b)(3a-b)}{3a^2 + 2ab + 3b^2} + \frac{(b-c)(3b-c)}{3b^2 + 2bc + 3c^2} + \frac{(c-a)(3c-a)}{3c^2 + 2ca + 3a^2} \geq 0$$

(diendantoanhoc.net)

Bài 22. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{2}$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài 23. Cho $x, y, z, a, b, c \geq 0$ sao cho $a+b+c = x+y+z$. Chứng minh:

$$ax(a+x) + by(b+y) + cz(c+z) \geq 3(abc + xyz)$$

Bài 24. Kéo dài trung tuyến của tam giác ABC đến khi chúng cắt đường tròn nội ngoại tiếp. Gọi độ dài của các đoạn này là M_a, M_b, M_c . m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$. Gọi Chứng minh rằng:

$$M_a + M_b + M_c \geq \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

$$\text{Và } M_a + M_b + M_c \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}(a+b+c)$$

Bài 25. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2 + a + 4}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 + b + 4}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2 + c + 4}} \leq 1$$

Bài 26. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 27$. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 21a + 9}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 21b + 9}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 21c + 9}} \geq \frac{1}{3}$$

Bài 27.*. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{13a+11b} + \frac{1}{13b+11c} + \frac{1}{13c+11a} \geq \frac{1}{7a+4b+13c} + \frac{1}{7b+4c+13a} + \frac{1}{7c+4a+13b}$$

BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

Đoàn Quốc Đạt – Ngô Hoàng Thanh Quang

1. Bất đẳng thức Chebyshev

1.1. Định lý

Cho 2 dãy số thực a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n

1. Nếu a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n đơn điệu cùng chiều ta có:

$$\text{Dạng 1: } \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

$$\text{Dạng 2: } (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{n}$$

2. Nếu a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\text{Dạng 1: } \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

$$\text{Dạng 2: } (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \leq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

1.2. Chứng minh Bằng phân tích trực tiếp, ta có hằng đẳng thức sau:

$$n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) - (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i,j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

Nếu a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n đơn điệu cùng chiều ta có:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \text{ hay}$$

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{n}$$

Nếu a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n đơn điệu ngược chiều ta có:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0 \text{ hay}$$

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \leq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{n}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a^n}{b+c-a} + \frac{b^n}{c+a-b} + \frac{c^n}{a+b-c} \geq \frac{(a+b+c)^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Bổ đề: Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thì ta có

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Chứng minh: Sử dụng bất đẳng thức $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ ta có

$$(a+b-c)(b+c-a) \leq \frac{[(a+b-c)+(b+c-a)]^2}{4} = b^2$$

Tương tự ta có:

$$(b+c-a)(c+a-b) \leq c^2$$

$$(a+b-c)(c+a-b) \leq a^2$$

Nhân vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có:

$$[(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^2 \leq (abc)^2$$

$$\Rightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Trở lại bài toán:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{n-1} \geq b^{n-1} \geq c^{n-1} \\ \frac{a}{b+c-a} \geq \frac{b}{c+a-b} \geq \frac{c}{a+b-c} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có

$$\frac{a^n}{b+c-a} + \frac{b^n}{c+a-b} + \frac{c^n}{a+b-c} \geq \frac{1}{3} (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \left(\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \right)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và bổ đề ta có:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}} \geq 3 \quad (1)$$

Và theo bất đẳng thức Holder ta có

$$(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \underbrace{(1+1+1)(1+1+1)\dots(1+1+1)}_{n-2} \geq (a+b+c)^{n-1} \quad (2)$$

Từ (1)(2) ta có:

$$\frac{1}{3} (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \left(\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \right) \geq \frac{(a+b+c)^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Qua ví dụ vừa rồi ta có thể thấy được: việc sử dụng bất đẳng thức Chebyshev đã đưa bài toán từ phức tạp về mức độ của một bài toán nhỏ hơn, đó là một việc rất hữu ích khi chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 2 Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 1$. Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh:

$$a) \sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{1}{n-1}$$

$$b) \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{S - a_i} \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

Phân tích và định hướng lời giải:

a) Để công việc chứng minh thuận lợi nhất, ta sẽ sử dụng triệt để điều kiện

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 \geq a_2^2 \geq \dots \geq a_n^2 \\ \frac{a_1}{S-a_1} \geq \frac{a_2}{S-a_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{S-a_n} \\ \frac{1}{S-a_1} \geq \frac{1}{S-a_2} \geq \dots \geq \frac{1}{S-a_n} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{S-a_i} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S-a_i} \right) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{S-a_i} \right) = \frac{S}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{S-a_i} \right) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{S-a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (S-a_i)} = \frac{n^2}{(n-1)S} \quad (3)$$

Từ (1)(2) và (3) ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{S-a_i} \geq \frac{S}{n^2} \cdot \frac{n^2}{(n-1)S} = \frac{1}{n-1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

b) Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 \geq a_2^2 \geq \dots \geq a_n^2 \\ \frac{1}{S-a_1} \geq \frac{1}{S-a_2} \geq \dots \geq \frac{1}{S-a_n} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều, ta có:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{S-a_i} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{S-a_i} \right) \quad (4)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{S-a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (S-a_i)} = \frac{n^2}{(n-1)S} \quad (5)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\underbrace{1+1+\dots+1}_n \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \Rightarrow S \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \quad (6)$$

Từ (4)(5) và (6) ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{S-a_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \frac{n^2}{(n-1) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Ví dụ 3 Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy số đơn điệu cùng chiều,ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \left(\sum \frac{1}{b+c} \right) \quad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \quad (2)$$

$$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \quad (3)$$

Từ (1)(2) và (3) ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 4 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c} + \frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

(Darij Grinberg)

Phân tích và định hướng lời giải

Để đơn giản bài toán, ta sẽ đặt
$$\begin{cases} \sqrt{b+c} = x \\ \sqrt{c+a} = y \\ \sqrt{a+b} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = y^2 + z^2 - x^2 \\ 2b = x^2 + z^2 - y^2 \\ 2c = x^2 + y^2 - z^2 \end{cases}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$\frac{x}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{z}{x^2 + y^2 - z^2} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow x \geq y \geq z$

Ta có:

$$x(y^2 + z^2 - x^2) - y(x^2 + z^2 - y^2) = (y-x)(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy) \leq 0$$

$$y(x^2 + z^2 - y^2) - z(x^2 + y^2 - z^2) = (z-y)(z^2 + y^2 - x^2 + 2yz) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(y^2 + z^2 - x^2)} \geq \frac{1}{y(x^2 + z^2 - y^2)} \geq \frac{1}{z(x^2 + y^2 - z^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy số đơn điệu cùng chiều, ta có:

$$\sum \frac{x}{y^2 + z^2 - x^2} \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) \left[\sum \frac{1}{x(y^2 + z^2 - x^2)} \right] \quad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{x(y^2+z^2-x^2)} + \frac{1}{y(x^2+z^2-y^2)} + \frac{1}{z(x^2+y^2-z^2)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(y^2+z^2-x^2)(x^2+z^2-y^2)(x^2+y^2-z^2)}}$$

Và áp dụng bổ đề ở bài 1:

$$x^2y^2z^2 \geq (y^2+z^2-x^2)(x^2+z^2-y^2)(x^2+y^2-z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(y^2+z^2-x^2)(x^2+z^2-y^2)(x^2+y^2-z^2)}} \geq \frac{3}{xyz} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 5 Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} = 1$. Chứng minh

rằng: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq (n-1) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$

Phân tích và định hướng lời giải:

Khác với những bài trước, bài này khá là khó để phát hiện được 2 dãy phù hợp để sử dụng bất đẳng thức Chebyshev; hơn nữa, điều kiện của bài khá là phức tạp. Do đó, ta sẽ biến đổi để khai thác triệt để điều kiện này. Đặt $\frac{1}{1+x_i^2} = a_i$

$\Rightarrow x_i = \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}$. Bài toán trở thành:

Cho $\begin{cases} 0 < a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1-a_1}{a_1}} + \sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}} + \dots + \sqrt{\frac{1-a_n}{a_n}} \geq (n-1) \left(\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}} + \sqrt{\frac{a_2}{1-a_2}} + \dots + \sqrt{\frac{a_n}{1-a_n}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-a_1}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}} + \dots + \sqrt{\frac{1-a_n}{a_n}} + \sqrt{\frac{a_n}{1-a_n}} \geq n \left(\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}} + \sqrt{\frac{a_2}{1-a_2}} + \dots + \sqrt{\frac{a_n}{1-a_n}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}} + \frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \geq n \left(\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}} + \sqrt{\frac{a_2}{1-a_2}} + \dots + \sqrt{\frac{a_n}{1-a_n}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}} + \frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \geq n \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2(1-a_2)}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \right)$$

Đến đây ta đã tạo ra được 2 bộ số đơn điệu ngược chiều đó là 2 bộ số (a_1, a_2, \dots, a_n)

và $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}, \frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \right)$. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\begin{aligned} & n \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2(1-a_2)}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \right) \\ & \leq n \cdot \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}} + \frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \right) \\ & = \frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}} + \frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Qua các ví dụ trên ắt hẳn các bạn đã phần nào tiếp nhận được sức mạnh của bất đẳng thức Chebyshev, tuy nhiên có thể nói rằng ở các bài toán trên thì các dãy đơn điệu vẫn còn khá "lộ" và điều đó làm cho chúng ta dễ dàng khai thác. Trên thực tế thì các bài toán thuộc loại khó thì thường không cho phép chúng ta áp dụng được ngay bất đẳng thức Chebyshev một cách trực tiếp mà phải qua các phép biến đổi tinh tế hơn. Để rõ hơn về điều ta cùng đi đến các ví dụ sau:

Ví dụ 6

Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \leq \frac{27}{10}$$

Phân tích và định hướng lời giải

Vì chiều của bất đẳng thức là bé hơn hoặc bằng nên đầu tiên ta sẽ nghĩ đến việc tạo ra 2 dãy đơn điệu ngược chiều ở VT để áp dụng được bất đẳng thức Chebyshev. Ta sẽ thử nhân tương ứng x, y, z vào cả tử và mẫu mỗi phân thức tương ứng và hi vọng có được 2 dãy cần tìm. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{x}{x(x^2+1)} + \frac{y}{y(y^2+1)} + \frac{z}{z(z^2+1)} \leq \frac{27}{10}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)} \leq \frac{1}{y(y^2+1)} \leq \frac{1}{z(z^2+1)}$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 bộ số đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x(x^2+1)} + \frac{y}{y(y^2+1)} + \frac{z}{z(z^2+1)} &\leq \frac{1}{3}(x+y+z) \left(\frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{y(y^2+1)} + \frac{1}{z(z^2+1)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{y(y^2+1)} + \frac{1}{z(z^2+1)} \right) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh rằng $\frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{y(y^2+1)} + \frac{1}{z(z^2+1)} \leq \frac{81}{10}$.

Nhưng thật đáng tiếc rằng bất đẳng thức trên lại không đúng!!! Thật vậy ta chỉ cần chọn

$x=0,5; y=0,3; z=0,2$ thì sẽ có ngay $\frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{y(y^2+1)} + \frac{1}{z(z^2+1)} \approx 9,466 > \frac{81}{10}$.

Vậy là ý tưởng sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 bộ số đơn điệu ngược chiều của chúng ta đã thất bại. Tuy nhiên hãy luôn tin tưởng rằng những thất bại như vậy là bình thường và chính điều đó mới thôi thúc chúng ta đi tìm kiếm những lời giải mới. Với bài toán này, khi không thể sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 bộ ngược chiều, điều còn lại chắc chắn chúng ta sẽ cố gắng tạo ra 2 bộ đơn điệu cùng chiều và lại áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, muốn như thế trước tiên chúng ta đưa bất đẳng thức đã cho về dạng:

$$\begin{aligned} &\frac{27}{10} - \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{9}{10} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{9}{10} - \frac{1}{y^2+1} + \frac{9}{10} - \frac{1}{z^2+1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{9x^2-1}{10(x^2+1)} + \frac{9y^2-1}{10(y^2+1)} + \frac{9z^2-1}{10(z^2+1)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{(3x-1)(3x+1)}{10(x^2+1)} + \frac{(3y-1)(3y+1)}{10(y^2+1)} + \frac{(3z-1)(3z+1)}{10(z^2+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Bây giờ thì 2 bộ số đơn điều cùng chiều đã được tạo ra, đó chính là 2 bộ số

$(3x-1; 3y-1; 3z-1)$ và $\left(\frac{3x+1}{x^2+1}; \frac{3y+1}{y^2+1}; \frac{3z+1}{z^2+1}\right)$. Thật vậy không mất tính tổng quát giả

sử $x \geq y \geq z$ khi đó ta có $3x-1 \geq 3y-1 \geq 3z-1$. Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{3x+1}{x^2+1} - \frac{3y+1}{y^2+1} = \frac{(x-y)(3-3xy-x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{(x-y)(2x+2y+3z-3xy)}{10(x^2+1)(y^2+1)} \geq 0$$

(Do $x \geq y$ và $2x+2y \geq 4\sqrt{xy} \geq 4xy > 3xy$ (do $0 \leq x, y \leq 1$))

$$\Rightarrow \frac{3x+1}{x^2+1} \geq \frac{3y+1}{y^2+1}.$$

Tương tự ta có: $\frac{3x+1}{x^2+1} \geq \frac{3y+1}{y^2+1} \geq \frac{3z+1}{z^2+1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\sum \frac{(3x-1)(3x+1)}{10(x^2+1)} \geq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} [3(x+y+z)-3] \left(\frac{3x+1}{x^2+1} + \frac{3y+1}{y^2+1} + \frac{3z+1}{z^2+1} \right) = 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Điều khó khăn nhất của bài toán này chính là việc phân tích về được dạng chuẩn tắc như đã trình bày ở lời giải trên. Sau khi đã đưa được về dạng đó thì bài toán còn lại trở nên khá đơn giản khi sử dụng bất đẳng thức Chebyshev.

Ví dụ 7

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \leq \frac{3}{8}$$

Nếu như chỉ giữ nguyên bất đẳng thức ở dạng này thì gần như là ta sẽ không thể chứng minh nó bằng bất đẳng thức Chebyshev được, chính vì thế ta sẽ đưa nó về dạng tương tự như ví dụ 6 là:

$$\frac{3}{8} - \left(\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{9-ab} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9-ca} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-ab}{9-ab} + \frac{1-bc}{9-bc} + \frac{1-ca}{9-ca} \geq 0$$

Đến đây ta cũng vẫn chưa thu được điều gì đáng kể, vì 2 bộ số $(1-ab; 1-bc; 1-ca)$ và $\left(\frac{1}{9-ab}; \frac{1}{9-bc}; \frac{1}{9-ca}\right)$ là 2 bộ số đơn điệu ngược chiều trong khi chiều của bất đẳng thức cần chứng minh lại là lớn hơn hoặc bằng. Điều này làm chúng ta nảy sinh ý nghĩ nhân cả tử và mẫu mỗi phân thức với cùng một đại lượng nào đó để tạo ra được 2 bộ số đơn điệu ngược chiều. Trên con đường đó ta đi đến lời giải sau:

$$\frac{1-ab}{9-ab} + \frac{1-bc}{9-bc} + \frac{1-ca}{9-ca} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-ab)(6+ab)}{(9-ab)(6+ab)} + \frac{(1-bc)(6+bc)}{(9-bc)(6+bc)} + \frac{(1-ca)(6+ca)}{(9-ca)(6+ca)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử: $a \geq b \geq c$, khi đó ta dễ dàng chứng minh được:

$$\begin{cases} (1-ab)(6+ab) \geq (1-bc)(6+bc) \geq (1-ca)(6+ca) \\ \frac{1}{(9-ab)(6+ab)} \geq \frac{1}{(9-bc)(6+bc)} \geq \frac{1}{(9-ca)(6+ca)} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\frac{(1-ab)(6+ab)}{(9-ab)(6+ab)} + \frac{(1-bc)(6+bc)}{(9-bc)(6+bc)} + \frac{(1-ca)(6+ca)}{(9-ca)(6+ca)} \geq \frac{1}{3} \left(\sum_{cyc}^{a,b,c} (1-ab)(6+ab) \right) \left(\sum_{cyc}^{a,b,c} \frac{1}{(9-ab)(6+ab)} \right)$$

Ta có: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow 9 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow 3 \geq ab+bc+ca(*)$. Vậy ta

chỉ cần chứng minh: $\sum_{cyc}^{a,b,c} (1-ab)(6+ab) \geq 0$ là bài toán sẽ được chứng minh hoàn tất.

Điều cần chứng minh tương đương với:

$$5(ab+bc+ca) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 18$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 + 3(ab+bc+ca) \leq 18$$

Theo bất đẳng thức (*) ta có: $(ab+bc+ca)^2 + 3(ab+bc+ca) \leq 3^2 + 3.3 = 18$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 8 Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 2n$. và $\max\{x_i + x_j\} \leq n-1$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1-x_i} \leq 1$.

Cũng như 2 ví dụ trên ta sẽ thử đưa bất đẳng thức đã cho về dạng chứng minh với chiều là lớn hơn hoặc bằng là:

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1-x_i} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1-x_i} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1-x_i}{n(n+1-x_i)} \geq 0$$

Tuy nhiên ta chưa thể sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ngay ở đây được, hơn nữa ta vẫn chưa sử dụng đến điều kiện khá "miễn cưỡng":

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 2n.$$

Chính vì thế ta cũng sẽ tìm cách nhân thêm một đại lượng tương ứng ở cả tử và mẫu mỗi phân thức để tận dụng triệt để giả thiết này.

$$\text{Ta có: } \sum_{i=1}^n \frac{1-x_i}{n(n+1-x_i)} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(1-x_i)(x_i+2)}{n(x_i+2)(n+1-x_i)} \geq 0$$

Đến đây không mất tính tổng quát giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ thì ta dễ dàng có được

$$\begin{cases} (1-x_1)(x_1+2) \leq (1-x_2)(x_2+2) \leq \dots \leq (1-x_n)(x_n+2) \\ \frac{1}{(x_1+2)(n+1-x_1)} \leq \frac{1}{(x_2+2)(n+1-x_2)} \leq \dots \leq \frac{1}{(x_n+2)(n+1-x_n)} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\frac{(1-x_i)(x_i+2)}{n(x_i+2)(n+1-x_i)} \geq \frac{1}{n^2} \left(2n - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i+2)(n+1-x_i)} \right) \geq 0$$

$$(\text{đúng do } x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 2n.)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Trong bài toán trên, việc khéo léo phát hiện ra nhân tử $x_i + 2$ để nhân vào mỗi phân thức chính là điểm mấu chốt, không những tận dụng được tối đa giả thiết bài toán mà còn cho ta một cách chứng minh bằng Chebyshev hết sức đẹp mắt.

Ví dụ 9

Cho $a, b, c > 0; k \leq 2$. Chứng minh:

$$\frac{a^2 - bc}{b^2 + c^2 + ka^2} + \frac{b^2 - ca}{c^2 + a^2 + kb^2} + \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + kc^2} \geq 0$$

Phân tích và định hướng lời giải

Nhân thêm các hệ số tương ứng vào mỗi phân số bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{(a^2 - bc)(b + c)}{(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c)} + \frac{(b^2 - ca)(c + a)}{(c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)} + \frac{(c^2 - ab)(a + b)}{(a^2 + b^2 + kc^2)(a + b)} \geq 0 \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$\bullet \quad \begin{cases} (a^2 - bc)(b + c) - (b^2 - ca)(c + a) = (ab + c^2)(a - b) + c(a^2 - b^2) \geq 0 \\ (b^2 - ca)(c + a) - (c^2 - ab)(a + b) = (bc + a^2)(a - c) + a(b^2 - c^2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2 - bc)(b + c) \geq (b^2 - ca)(c + a) \geq (c^2 - ab)(a + b)$$

$$\bullet \quad (b^2 + c^2 + ka^2)(b + c) - (c^2 + a^2 + kb^2)(c + a) = (b - a) \left[\sum a^2 - (k - 1) \sum ab \right] \leq 0$$

Tương tự ta có

$$(c^2 + a^2 + kb^2)(c + a) \leq (a^2 + b^2 + kc^2)(a + b)$$

Do đó

$$\frac{1}{(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c)} \geq \frac{1}{(c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)} \geq \frac{1}{(a^2 + b^2 + kc^2)(a + b)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$VT(*) \geq \left[(a^2 - bc)(b+c) + (b^2 - ca)(c+a) + (c^2 - ab)(a+b) \right] \sum \frac{1}{(b^2 + c^2 + ka^2)(b+c)} = 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 10

Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right]$$

Phân tích và định hướng lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$3 \sum \frac{a}{b+c} \geq 2 \sum \frac{bc+a(b+c)}{(b+c)^2} = 2 \sum \frac{bc}{(b+c)^2} + 2 \sum \frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{a}{b+c} \geq 2 \sum \frac{bc}{(b+c)^2} \Leftrightarrow \sum \frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$\begin{cases} ab+ac-2bc \geq bc+ba-2ca \geq ca+cb-2ab \\ \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\sum \frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{3} \left[\sum (ab+ac-2bc) \right] \left[\sum \frac{1}{(b+c)^2} \right] = 0$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Qua các ví dụ vừa qua, ta có thể thấy được, khi đứng trước các bất đẳng thức có dạng đối xứng bên cạnh các bất đẳng thức cổ điển như AM-GM hay Cauchy-Schwarz thì Chebyshev luôn là một phương án tối ưu. Tuy nhiên, để sử dụng một cách hiệu quả Chebyshev thì đòi hỏi người làm phải có sự tinh tế và khéo léo để phân tách các đại lượng hợp lý.

3. Bài tập tự giải

Bài 1

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh;

$$\sum \frac{a^x}{(b+c-a)^y} \geq \sum a^{x-y}$$

Bài 2

Cho $a, b, c \geq 0$ Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c) \geq \sqrt{a^2+8bc} + \sqrt{b^2+8ca} + \sqrt{c^2+8ab}$$

Bài 3

Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2$$

Bài 4

Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{11+a^2} + \frac{1}{11+b^2} + \frac{1}{11+c^2} + \frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}$$

Bài 5

Cho $a_1, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $a_1 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh với mọi số nguyên

$$k \geq 1 \text{ ta có: } \frac{a_1^k}{1-a_1} + \frac{a_2^k}{1-a_2} + \dots + \frac{a_n^k}{1-a_n} \geq \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n-1}$$

BẮT ĐẲNG THỨC MUIRHEAD

Lê Nguyễn Nam Sơn- Nguyễn Xuân Quí

1. Giới thiệu bất đẳng thức Muirhead:

Bất đẳng thức Muirhead được ra đời vào đầu thế kỉ XX nhưng chỉ được mọi người thực sự quan tâm việc ứng dụng của nó trong chứng minh bất đẳng thức khi Internet phát triển cùng với sự ra đời các website Toán học nổi tiếng trên thế giới. Sở dĩ bất đẳng thức Muirhead được chú ý muộn vì phạm vi của nó chủ yếu để so sánh các đa thức đồng bậc nhưng việc chuyển đổi một bất đẳng thức đẹp đẽ (dạng phân thứ thu gọn) về dạng đa thức cộng kênh nhiều số hạng là việc làm bất đắc dĩ mang tính chất thợ thủ công hơn là sự thông minh, khéo léo. Tuy nhiên phải thừa nhận bất đẳng thức Muirhead là một công cụ mạnh hơn AM – GM bởi vì nó so sánh 2 cấu trúc liên kết cộng có cả 2 vế chứ không phải ở giữa một liên kết cộng (liên kết mạnh) với một liên kết nhân (liên kết yếu). Với việc mã hóa trong ngôn ngữ kí hiệu thì chúng ta có thể dễ dàng chuyển đổi bất đẳng thức dạng phân thức sang đa thức.

2. Một số khái niệm liên quan đến Bất đẳng thức Muirhead:

2.1. Bộ trội

Cho 2 bộ n số sắp thứ tự $\begin{cases} (a) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$

Tức là: $\begin{cases} a_i \geq a_{i+1} \\ b_i \geq b_{i+1} \end{cases} \forall i = \overline{1, n-1}$

Ta nói bộ (a) trội hơn bộ (b), kí hiệu $a \succ b$ nếu và chỉ nếu chúng thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \\ a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n \end{array} \right. \quad \text{hay} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m b_k \quad \forall m = \overline{1, n-1} \\ \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k \end{array} \right.$$

2.2. Trung bình loại $[a]$

Giả sử $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$. Ta kí hiệu: $\sum F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tổng của $n!$ biểu thức thu được từ $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bằng tất cả hoán vị của x_i

Xét trường hợp đặc biệt: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} (x_i > 0, \alpha_i > 0)$

Khi đó, trung bình loại $[a]$ được định nghĩa như sau:

$$[a] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \frac{1}{n!} \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Đặc biệt:

Trung bình cộng: $[1; 0; 0; \dots; 0] = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

Trung bình nhân: $[\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}] = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

2.3. Tổng hoán vị

Cho $P(a, b, c)$ là hàm ba biến a, b, c . Khi đó, tổng hoán vị của $P(a, b, c)$ được kí hiệu là $\sum_{cyc} P(a, b, c)$ và $\sum_{cyc} P(a, b, c) = P(a, b, c) + P(b, c, a) + P(c, a, b)$

Ví dụ: $\sum_{cyc} ab^2c^3 = ab^2c^3 + bc^2a^3 + ca^2b^3$

2.4. Tổng đối xứng

Cho $P(a, b, c)$ là hàm ba biến a, b, c . Khi đó, tổng đối xứng của $P(a, b, c)$ được kí hiệu là $\sum_{sym} P(a, b, c)$ và

$$\sum_{sym} P(a, b, c) = P(a, b, c) + P(b, c, a) + P(c, a, b) + P(c, b, a) + P(a, c, b) + P(b, a, c)$$

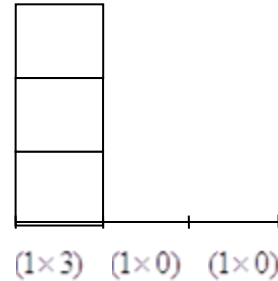
Ví dụ: $\sum_{sym} abc = 6abc$

2.5. Lược đồ Young

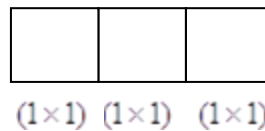
Xét các đa thức đối xứng với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Biểu diễn $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ là tổng diện tích của các hình chữ nhật có kích thước $(1 \times a_i)$, tức là:

$$S = (1 \times \alpha_1) + (1 \times \alpha_2) + \dots + (1 \times \alpha_n)$$

VD: $S_{a_1, a_2, a_3}^{3, 0, 0} = 2(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) \Leftrightarrow$



Ví dụ:: $S_{a_1, a_2, a_3}^{1, 1, 1} = 6a_1 a_2 a_3 \Leftrightarrow$



3. Định lý Muirhead:

Mặc dù lược đồ Young đã giúp chúng ta rất nhiều nhưng nó vẫn còn tồn tại nhiều hạn chế nhất định

Ví dụ:: Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc, tức là:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Khi đó nếu biểu diễn bằng lược đồ Young số các hình chữ nhật (1×0) của $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ và $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}$ là bằng nhau thì chưa so sánh được 2 đa thức đối xứng này với nhau bằng lược đồ Young. Và định lý *Muirhead* sẽ giúp ta giải quyết được vấn đề này.

Định lý Muirhead: Cho $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$ và (a), (b) là 2 bộ n số thực. Khi đó, nếu $a \succ b$ thì $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \geq S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}$. Kí hiệu: $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \succ [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$

Đảo lại: Nếu mọi bộ $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gồm n số thực dương, ta có $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \geq S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}$ thì $a \succ b$

Nhận xét: Bất đẳng thức *Muirhead* thường được sử dụng cho bất đẳng thức ba biến bởi những lý do sau:

+ Đối với bất đẳng thức hai biến số, việc áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ có thể giải quyết dễ dàng và đơn giản hơn so với định lý *Muirhead*.

+ Đối với bất đẳng thức từ bốn biến trở lên, việc đưa về đa thức đối xứng là một điều rất khó khăn.

Sau đây là cách chứng minh định lý *Muirhead* với ba biến số:

Trước hết, ta chứng minh với $n = 2$

$$\text{Nếu } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2; \beta_1 \geq \beta_2 \\ \alpha_1 \geq \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases} \text{ thì } [\alpha_1; \alpha_2] \succ [\beta_1; \beta_2]$$

Ta có:

$$(a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} + a_1^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1}) - (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} + a_1^{\beta_2} a_2^{\beta_1}) = (a_1 a_2)^{\alpha_2} (a_1^{\alpha_1 - \beta_1} - a_2^{\alpha_1 - \beta_1})(a_1^{\alpha_1 - \beta_2} - a_2^{\alpha_1 - \beta_2}) \geq 0$$

$$\Rightarrow [\alpha_1; \alpha_2] \succ [\beta_1; \beta_2]$$

$$\text{Với } n = 3: \text{ Nếu } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \\ \alpha_1 \geq \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases} \text{ thì } [\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3] \succ [\beta_1; \beta_2; \beta_3]$$

Gọi I_3 là một hoán vị (i_1, i_2, i_3) của bộ số $(1; 2; 3)$

Sử dụng kết quả với $n = 2$, ta có:

$$\sum_{I_3} a_{i_3}^{\alpha_3} \cdot (a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} + a_{i_1}^{\alpha_2} a_{i_2}^{\alpha_1}) \geq \sum_{I_3} a_{i_3}^{\alpha_3} \cdot (a_{i_1}^{\beta_1} a_{i_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1} + a_{i_1}^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1} a_{i_2}^{\beta_1})$$

$$= \sum_{I_3} a_{i_1}^{\beta_1} \cdot (a_{i_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1} a_{i_3}^{\alpha_3} + a_{i_2}^{\alpha_3} a_{i_3}^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1}) \geq \sum_{I_3} a_{i_1}^{\beta_1} \cdot (a_{i_2}^{\beta_2} a_{i_3}^{\beta_3} + a_{i_2}^{\beta_3} a_{i_3}^{\beta_2})$$

$$\Rightarrow [\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3] \succ [\beta_1; \beta_2; \beta_3]$$

Ta có một số nhận xét sau đây

Nhận xét 1: Bất đẳng thức $AM - GM$ là hệ quả của định lý *Muirhead*

$$[1, 0, \dots, 0] \succ \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right]$$

Nhận xét 2: Nếu $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ thì:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [(\alpha_1 - r), (\alpha_2 - r), \dots, (\alpha_n - r)]; \forall r \in \mathbb{R}$$

Nhận xét 3: Nếu $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$ thì :

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \geq [(\alpha_1 - r), (\alpha_2 - r), \dots, (\alpha_n - r)]; \forall r \geq 0$$

Nhận xét 4: Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có:

Với 2 bộ n số thực (a) và (b): $\frac{[a] + [b]}{2} \geq \left[\frac{a+b}{2} \right]$

4. Kỹ thuật sử dụng định lý Muirhead

Sử dụng biến đổi tương đương dương và định lý *Muirhead*

Phương pháp chung

Để ứng dụng đa thức đối xứng và định lý *Muirhead* trong chứng minh bất đẳng thức, ta cần thực hiện theo 2 bước cơ bản sau:

Bước 1: Phân tích

- + Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tổng các đa thức đối xứng ở cả 2 vế của bất đẳng thức
- + Biểu diễn các đa thức đối xứng theo kí hiệu quy ước trong lý thuyết nói trên.

Bước 2: Đánh giá

- + Cách đánh giá: Làm mất dần các đa thức đối xứng có giá trị lớn ở vế có giá trị nhỏ hơn. Thay vào đó là các đa thức đối xứng nhỏ nhất có thể.
- + Phép đánh giá được thực hiện nhờ các nguyên tắc sau:
 - Sử dụng đánh giá các bất đẳng thức sẵn có
 - Tìm tòi, dự đoán các bất đẳng thức nhỏ hơn cần chứng minh
 - Sử dụng các cách biến đổi để tạo ra cách đánh giá mới

5. Sử dụng định lý Muirhead với AM – GM, Holder, ASYM, Schur

5.1. Bất đẳng thức AM – GM

Dạng tổng quát: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Dạng suy rộng: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n}$

5.2. Bất đẳng thức Holder

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m a_{ij}} \right)^m \quad \text{với } a_{ij} > 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$$

5.3. Bất đẳng thức ASYM

Kết hợp giữa bất đẳng thức AM – GM và Holder, ta có bất đẳng thức ASYM như sau:

Cho m bộ số $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n), (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n), \dots, (\alpha_{m_1}; \alpha_{m_2}; \dots; \alpha_{m_n})$ với $m, n \in \mathbb{N}^+$

Và $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Đặt $t_i = \frac{\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{m_i}}{m} \forall i = \overline{1, 2}$

Khi đó: Ta có bất đẳng thức ASYM:

$$[\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n] + [\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n] + \dots + [\alpha_{m_1}; \alpha_{m_2}; \dots; \alpha_{m_n}] \geq m[t_1; t_2; \dots; t_n]$$

Nhận xét: Bất đẳng thức ASYM chính là sự kết hợp của 2 bất đẳng thức: hệ quả của bất đẳng thức AM – GM (vế trái) và bất đẳng thức suy ra từ bất đẳng thức Holder (vế phải)

5.4. Sử dụng định lý Muirhead với bất đẳng thức Schur:

Dạng chính tắc:

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-c)(b-a) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [k+2; 0; 0] + [k; 1; 1] \succ 2[k+1; 1; 0]$$

6. Ví dụ

Chúng ta hãy bắt đầu với một ví dụ khá đơn giản:

Ví dụ 1: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Giải:

Cách 1: Khai triển, ta có:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sum_{sym} a^2b \geq 6abc$

Theo định lý *Muirhead*, ta có: $[2;1;0] \succ [1;1;1]$ (hiển nhiên đúng)

Vậy $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức *AM – GM* với 2 số thực dương

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: tam giác ABC đều.

Nhận xét: Trên đây chỉ là một bất đẳng thức quen thuộc mà việc áp dụng định lý *Muirhead* khá đơn giản, chỉ việc khai triển biểu thức ban đầu và áp dụng thẳng định lý *Muirhead*.

Dưới đây ta sẽ xét với một bất đẳng thức dạng phân thức, đòi hỏi sự phân tích chính xác

Ví dụ 2: (IMO 2005 Pro A3) Cho x, y, z là các số thực dương, $xyz \geq 1$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

Giải:

Cách 1: Quy đồng khử mẫu. Ta có:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum_{sym} x^9 + 4 \sum_{sym} x^7 y^5 + \sum_{sym} x^5 y^2 z^2 + \sum_{sym} x^5 y^5 z^5 \geq \sum_{sym} x^6 + \sum_{sym} x^5 y^5 z^2 + 2 \sum_{sym} x^5 y^4 + 2 \sum_{sym} x^4 y^2 + \sum_{sym} x^2 y^2 z^2$$

Ta cần chứng minh:

$$[9; 0; 0] + 4[7; 5; 0] + [5; 2; 2] + [5; 5; 5] \geq [6; 0; 0] + [5; 5; 2] + 2[5; 4; 0] + 2[4; 2; 0] + [2; 2; 2]$$

Thật vậy, sử dụng định lý *Muirhead* và 2 nhận xét:

+ Nếu $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$ thì $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \geq [(\alpha_1 - r), (\alpha_2 - r), \dots, (\alpha_n - r)]; \forall r \geq 0$

+ Với 2 bộ n số thực (a) và (b) thì: $\frac{[a] + [b]}{2} \geq [\frac{a+b}{2}]$

Ta có:

$$[9; 0; 0] \succ [7; 1; 1] \succ [(7-1); (1-1); (1-1)] = [6; 0; 0]$$

$$[7; 5; 0] \succ [5; 5; 2]$$

$$2[7; 5; 0] \succ 2[6; 5; 1] \succ 2[(6-1); (5-1); (1-1)] = 2[5; 4; 0]$$

$$[7; 5; 0] + [5; 2; 2] \succ 2[6; \frac{7}{2}; 1] \succ 2[\frac{11}{2}; \frac{7}{2}; \frac{3}{2}] \succ 2[(\frac{11}{2} - \frac{3}{2}); (\frac{7}{2} - \frac{3}{2}); (\frac{3}{2} - \frac{3}{2})] = 2[4; 2; 0]$$

$$[5; 5; 5] \succ [(5-3); (5-3); (5-3)] = [2; 2; 2]$$

Cộng vế theo vế của các đánh giá trên, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$.

Cách 2: Ta có: $\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2 \cdot xyz}{x^5 + (y^2 + z^2) \cdot xyz} = \frac{x^4 - x^2 yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)} \geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$.

Ta cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b) \left[\frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (a+c)^2} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \frac{c^2 + c(a+b) + a^2 - ab + b^2}{[2a^2 + (b+c)^2][2b^2 + (a+c)^2]} \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.

Nhận xét:

Khi dùng định lý *Muirhead*, bên cạnh việc đánh giá các bộ số, người sử dụng cần phải nắm vững những nhận xét cơ bản, những kỹ thuật biến đổi đơn giản để tạo ra các bộ số “trung gian”, nhằm đánh giá được các bộ số mà bình thường không thể đánh giá được.

Bên cạnh việc phân tích đơn thuần, áp dụng định lý *Muirhead* cho một bất đẳng thức nhất định không nhất thiết chỉ có một cách. Đối với một số bài toán, chúng ta có thể sử dụng các kỹ thuật biến đổi để tạo ra nhiều đánh giá khác nhau, nhiều lời giả sáng tạo.

Ví dụ 3: (IMO – 1995) Cho a, b, c là các số thực dương, $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Giải:

Cách 1: Quy đồng khử mẫu. Ta có:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum_{sym} a^4 b^4 + 2 \sum_{sym} a^4 b^3 c + \sum_{sym} a^3 b^3 c^2 \geq 3 \sum_{sym} a^5 b^4 c^3 + \sum_{sym} a^4 b^4 c^4$$

Ta cần chứng minh:

$$[4; 4; 0] + 2[4; 3; 1] + [3; 3; 2] \geq 3[5; 4; 3] + [4; 4; 4]$$

Thật vậy: Sử dụng định lý *Muirhead* và nhận xét:

+ Nếu $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ thì $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \geq [(\alpha_1 - r), (\alpha_2 - r), \dots, (\alpha_n - r)]; \forall r \geq 0$

Áp dụng:

$$[5;4;3] = [\frac{11}{3}; \frac{8}{3}; \frac{5}{3}]$$

$$[4;4;4] = [\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}]$$

Mặt khác:

$$[4;4;0] \succ [\frac{11}{3}; \frac{8}{3}; \frac{5}{3}]$$

$$2[4;3;1] \succ 2[\frac{11}{3}; \frac{8}{3}; \frac{5}{3}]$$

$$[3;3;2] \succ [\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}]$$

Cộng vế theo vế của các đánh giá trên, ta có ngay điều phải chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.

Cách 2: Vì $abc=1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2(abc)^{\frac{4}{3}}} \quad (1)$$

Đặt $a=x^3, b=y^3, c=z^3 (x, y, z > 0)$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{x^9(y^3+z^3)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4} \quad (2)$$

Quy đồng khử mẫu. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{sym} x^{12}y^{12} + 2\sum_{sym} x^{12}y^9z^3 + \sum_{sym} x^9y^9z^6 \geq 3\sum_{sym} x^{11}y^8z^5 + \sum_{sym} x^8y^8z^8$$

Ta cần chứng minh:

$$[12;12;0] + 2[12;9;3] + [9;9;6] \geq 3[11;8;5] + [8;8;8]$$

Theo định lý *Muirhead*, ta có:

$$\begin{aligned}
[12;12;0] &\succ [11;8;5] \\
2[12;9;3] &\succ 2[11;8;5] \\
[9;9;6] &\succ [8;8;8]
\end{aligned}$$

Cộng về theo về các đánh giá trên, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Swcharz* dạng *Engel*, ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} = \sum_{cyc} \frac{b^2c^2}{ab+ac} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} bc\right)^2}{2\sum_{cyc} bc} = \frac{\sum_{cyc} bc}{2}$$

Mặt khác: Theo bất đẳng thức *AM – GM*:

$$\frac{\sum_{cyc} bc}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.

Nhận xét: Trên đây là những bài toán cổ điển quen thuộc. Đối với những bất đẳng thức có hệ số khá lớn thì sao? Chúng ta xét ví dụ.

Ví dụ 4: (Tigran Sloyan) : Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Cách 1: Quy đồng và khử mẫu, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương với:

$$\begin{aligned}
&66\sum_{sym} a^3b^2c + \frac{15}{2}\sum_{sym} a^4bc + 6\sum_{sym} a^4b^2 + 12\sum_{sym} a^3b^3 + 30\sum_{sym} a^2b^2c^2 \\
&\geq 70\sum_{sym} a^3b^2c + 10\sum_{sym} a^4bc + 8\sum_{sym} a^4b^2 + 10\sum_{sym} a^3b^3 + \frac{47}{2}\sum_{sym} a^2b^2c^2 \\
&\Leftrightarrow 2\sum_{sym} a^3b^3 + \frac{13}{2}\sum_{sym} a^2b^2c^2 \leq 4\sum_{sym} a^3b^2c + \frac{5}{2}\sum_{sym} a^4bc + 2\sum_{sym} a^4b^2
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$2[3; 3; 0] + \frac{13}{2}[2; 2; 2] \leq 4[3; 2; 1] + \frac{5}{2}[4; 1; 1] + 2[4; 2; 0]$$

Theo định lý Muirhead, ta có:

$$\begin{aligned} 2[3; 3; 0] &\prec 2[4; 2; 0] \\ 4[2; 2; 2] &\prec 4[3; 2; 1] \\ \frac{5}{2}[2; 2; 2] &\prec \frac{5}{2}[4; 1; 1] \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế của các đánh giá trên, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$ hoặc $a = b; c = 0$ và các hoán vị.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Swcharz*, ta có:

$$\frac{9a^2}{(2a+b)(2a+c)} = \frac{(2a+a)^2}{2a(a+b+c) + (2a^2+bc)} \leq \frac{4a^2}{2a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc} = \frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Nên:

$$\sum \frac{9a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq 2 \sum \frac{a}{a+b+c} + \sum \frac{a^2}{2a^2+bc} = 2 + \sum \frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

$$\frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Swcharz* dạng *Engel*:

$$\sum \frac{bc}{2a^2+bc} = \sum \frac{b^2c^2}{bc(2a^2+bc)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum bc(2a^2+bc)} = 1$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$ hoặc $a = b; c = 0$ và các hoán vị

Cách 3:

Ta có:

$$\frac{1}{3} \sum \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} = \sum \left[\frac{a}{3(a+b+c)} - \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \right] = \frac{1}{3} \sum \frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$

Khi đó:

$$\begin{cases} a(a+2b) \geq b(b+2a) > 0 \\ a(2b+c) \geq b(2a+c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot \frac{a}{(2a+b)(2a+c)} \geq b \cdot \frac{b}{(2b+a)(2b+c)}$$

Theo bất đẳng thức *Vornicu Schur*, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Ví dụ 5: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b}{c^2+ab} + \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ac}$$

Giải:

Cách 1: Quy đồng khử mẫu rồi thu gọn biểu thức, ta có:

$$\text{Bất đẳng thức tương đương với: } \sum a^4 b^2 c^2 \leq \sum a^4 b^4$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì theo định lý Muirhead:

$$[4; 2; 2] \prec [4; 4; 0]$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c$

Cách 2: Ta có

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Swcharz* dạng Engel, ta có:

$$\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)}$$

Do đó:

$$\sum \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \sum \left[\frac{a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{c^2}{c(c^2+a^2)} \right] = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c$

Nhận xét: Đôi khi, trong quá trình sử dụng đơn thuần định lý *Muirhead* sẽ gặp phải sự đánh giá khá vất vả. Việc kết hợp với các bất đẳng thức khác như *AM - GM*, *Holder*, *Schur* sẽ giúp chúng ta giải quyết nhanh gọn các bài toán này.

Ví dụ 6: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3 \geq \sum_{sym} \frac{a}{b}$$

Giải: Đặt $\frac{a}{b} = \frac{m^2}{np}; \frac{b}{c} = \frac{n^2}{mp}; \frac{c}{a} = \frac{p^2}{mn}$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành:

$$\sum \frac{m^4}{n^2 p^2} + 3 \geq \sum_{sym} \frac{m^2}{np} \Leftrightarrow \sum m^6 + 3m^2 n^2 p^2 \geq \sum m^4 np + \sum m^3 n^3$$

Ta cần chứng minh: $[6; 0; 0] + [2; 2; 2] \geq [4; 1; 1] + [3; 3; 0]$

Theo *Muirhead - Schur*, ta có:

$$[6; 0; 0] + [2; 2; 2] \geq 2[4; 2; 0]$$

Mặt khác: Theo định lý *Muirhead*, ta cũng có:

$$[4; 2; 0] \succ [4; 1; 1]; [4; 2; 0] \succ [3; 3; 0]$$

Nên ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$

Hay ví dụ sau:

Ví dụ 7: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a + b + c)^2 \geq 8(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)^2$$

Giải:

Cách 1:

Chuẩn hóa: $a+b+c=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2$$
$$\Leftrightarrow \sum_{sym} a^6b^2 + 2\sum_{sym} a^5b^3 + 2\sum_{sym} a^5b^2c + 2\sum_{sym} a^4b^3c + \sum_{sym} a^4b^2c^2 + \sum_{sym} a^3b^3c^2 \geq 3\sum_{sym} a^4b^4 + 6\sum_{sym} a^4b^2c^2$$

Ta cần chứng minh:

$$[6; 2; 0] + 2[5; 3; 0] + 2[5; 2; 1] + 2[4; 3; 1] + 2[3; 3; 2] \geq 3[4; 4; 0] + 6[4; 2; 2]$$

Theo định lý *Muirhead*, ta có:

$$[6; 2; 0] \succ [4; 4; 0]; 2[5; 3; 0] \succ [4; 4; 0]$$

Theo bất đẳng thức *ASYM*:

$$2[5; 2; 1] + 2[4; 1; 3] + 2[3; 3; 2] \geq 6\left[\frac{5+4+3}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3+2}{3}\right] = 6[4; 2; 2]$$

Cộng về theo về các đánh giá trên, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}; c=0$ và các hoán vị

Cách 2: Đặt $x=a^2; y=b^2; z=c^2$

Ta có: $(a+b+c)^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$

Lại có, theo bất đẳng thức *AM – GM*:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \geq \frac{4xy}{x+y}$$

Tương tự:

$$2\sqrt{yz} \geq \frac{4yz}{y+z}; 2\sqrt{zx} \geq \frac{4zx}{z+x}$$

Nên:

$$(a+b+c)^2 \geq \sum x + \sum \frac{4xy}{x+y}$$

Mặt khác:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\left(\sum x + \sum \frac{4xy}{x+y}\right) - 8\left(\sum xy\right)^2 = \sum xy(x-y)^2 \geq 0; \forall x, y, z \geq 0$$

Nên bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b; c=0$ và các hoán vị

Nhận xét: Qua 2 ví dụ trên, dễ dàng nhận ra rằng, việc sử dụng các bất đẳng thức như *AM – GM*, *Holder*, *ASYM* kết hợp với định lý *Muirhead* rất hữu ích khi xuất hiện bộ trội ở phía ngược chiều bất đẳng thức.

7. Bài tập tự giải

1) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực dương thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq 2$$

2) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{sym} \frac{a^3}{b^3} \geq \sum \frac{a^2}{bc} + \sum \frac{ab}{c^2}$$

3) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(ab+bc+ca)^2 \geq 8a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)^2$$

4) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2bc} + \frac{b}{b^2+2ca} + \frac{c}{c^2+2ab} \leq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

5) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

6) (Iran 96) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

7) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

8) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\geq(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b)$$

9) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$\sum\frac{(a^2-b^2)^2}{a^4}+\prod\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)+6\sum\frac{b}{a}\geq2\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2+8$$

(Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức *ASYM* khi đánh giá bộ trội)

10) Cho các số a, b, c không âm sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\geq\frac{12}{(a+b+c)^2}$$

PHƯƠNG PHÁP PQR

Trần Thanh Bình

1. Kiến thức liên quan

1.1. Định nghĩa và các phép biến đổi

- Đa thức đối xứng **Vi-et**:

Ta có $p = a + b + c; q = ab + bc + ca; r = abc$ là các đa thức đối xứng **Vi-et**

- Mệnh đề: Mọi đa thức đối xứng $H(a, b, c)$ đều có thể biến đổi về dạng $T(p, q, r)$

- Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r$$

$$(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) = p^2 + q$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr$$

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2$$

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = pq - 3r$$

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) = p^2q - 2q^2 - pr$$

1.2. Phương pháp pqr kết hợp bất đẳng thức Schur

- Bất đẳng thức Schur:

Với mọi số thực a, b, c, k không âm. Ta có bất đẳng thức

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

Các trường hợp thông dụng nhất là $k=1; k=2$

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-a)(b-c) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

- Từ bất đẳng thức Schur kết hợp với AM-GM ta có các bất đẳng thức cơ bản sau:

$$\begin{array}{llll}
p^2 \geq 3q & p^2q + 3pr \geq 4q^2 & p^2q + 3pr + 2q^2 & q^3 + 9r^2 \geq 4pqr \\
q^2 \geq 3pr & pq^2 + 3qr \geq 4p^2r & pq^2 \geq 2p^2r + 3qr & 2q^3 + 9r^2 \geq 7pqr \\
p^3 \geq 27r & p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q & 2p^3 + 9r \geq 7pq & p^3r + q^3 \geq 6pqr
\end{array}$$

Ví dụ 1: Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc \geq 10$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $3p^2 - 6q + r \geq 10 \Leftrightarrow 3p^2 - 7q - 6 \geq 0$ (*)

Theo BĐT **Schur** ta có $p^3 + 9r \geq 4pq \Rightarrow p^3 + 9(4 - q) \geq 4pq \Rightarrow q \leq \frac{36 + p^3}{4p + 9}$

Thay vào (*) ta có $3p^2 - 7q - 6 \geq 3p^2 - 7 \cdot \frac{36 + p^3}{4p + 9} - 6$. Do đó ta cần chứng minh

$$3p^2 - 7 \cdot \frac{36 + p^3}{4p + 9} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (p - 3)(5p^2 + 42p + 102) \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 3$$

Ta thấy: $q^3 \geq 27r^2 = 27(4 - q)^2$. Nếu $q \leq 3$ thì $q^3 \leq 27 < 27(4 - q)^2 < q^3$ (vô lý)

Nên $q \geq 3 \Rightarrow p \geq 3$. Vậy ta có điều phải chứng minh dấu đẳng thức khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$(a^4 + b^4 + c^4)(ab + bc + ca) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $q = 1$. Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
(p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr)q &\geq (p^2 - 2q)(q^2 - 2pr) \\
\Leftrightarrow p^4 - 5p^2 + 4 + 2p^3r &\geq 0
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có: $p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2 + 4 + 6pr \geq 0$

Lại có $p^2 \geq 3q = 3$, nên $p^4 - 5p^2 + 4 + 2p^3r = (p^4 - 5p^2 + 4 + 6pr) + 2pr(p^2 - 3) \geq 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị hoặc $a \in \mathbb{R}^+$ bất kì, $b=c=0$ cùng các hoán vị.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$3 + \frac{12}{abc} \geq 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời Giải: Biến đổi về dạng pqr ta có $3r+12 \geq 5q$

Theo bất đẳng thức **Shur** ta có $3r \geq \frac{3p(4q-p^2)}{9} = 4q-9$

Do đó ta cần chứng minh $4q-9+12 \geq 5q \Leftrightarrow q \leq 3$ (đúng do $3q \leq p^2 = 9$)

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 5$

Lời Giải: Chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về dạng pqr và chuẩn hóa $p=1$

ta có $\frac{1-3p+3r}{q-r} + 9\frac{q}{1-2q} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{q} + \frac{9q}{1-2q} \geq 8$ (*)

Ta thấy : $\frac{1}{q} + \frac{9q}{1-2q} = 2 + \frac{1-2q}{q} + \frac{9q}{1-2q} \geq 2 + 2\sqrt{9} = 8$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2}x, x, 0)$

hoặc $(a, b, c) = (\frac{3-\sqrt{5}}{2}x, x, 0)$ và các hoán vị.

Nhận xét: Ta thấy những lời giải trên hết sức ngắn gọn và lại rất rõ ràng chính xác. Đây chính là một phương pháp mạnh trong việc chứng minh bất đẳng thức đối xứng 3 biến. Chúng ta sẽ tiếp tục với những ví dụ khó hơn.

Ví dụ 5: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{4(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3} \geq 5 \quad (1)$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $p=1$. Biến đổi về dạng pqr ta có (1) tương đương

$$\text{với: } \frac{1-2q+3r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 4$$

Ta thấy:

$$\frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq \frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+4r} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1-3q+4r}{q-r} \cdot \frac{4(q-r)}{1-3q+4r}} = 4$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

1.3. Mở rộng phương pháp pqr kết hợp hàm số

Ta có các bổ đề sau:

***Bổ đề 1:** (bất đẳng thức schur) $\forall a,b,c \geq 0$ thì $r \geq \frac{4pq-p^3}{9}$

***Bổ đề 2:** $\forall a,b,c \in R$ thì tồn tại các số thực $x_0; y_0; x_1; y_1$ sao cho:

$$p = a + b + c = 2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1$$

$$q = ab + bc + ca = x_0^2 + 2x_0y_0 = x_1^2 + 2x_1y_1$$

$$x_0^2y_0 \leq r = abc \leq x_1^2y_1$$

Ngoài ra nếu $a,b,c \geq 0$ thì $x_0, x_1, y_1 \geq 0$. Trong đó:

+Nếu $p^2 \geq 4q$ thì $y_0 \leq 0$.

+Nếu $p^2 \leq 4q$ thì $y_0 \geq 0$.

Ví dụ 1: Cho $a,b,c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Lời giải:

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^2 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Do 2 vế của hai bất đẳng thức này đồng nhất nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca$, $r=abc \Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{1}{3}$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\begin{aligned} q \cdot (1-2q)^2 &\geq q^2 - 2r(*) \\ f(r) &= 18r + 9q(4q-1)(q-1) \geq 0 \end{aligned}$$

-Trường hợp 1 : $4q \leq 1$ thì (*) hiển nhiên đúng.

-Trường hợp 2 : $4q \geq 1$, thế thì theo bổ đề 1, ta có: $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$

Do đó

$$f(r) = 18r + 9q(4q-1)(q-1) \geq 2(4q-1) + 9q(4q-1)(q-1) = (4q-1)(2-3q)(1-3q) \geq 0$$

$\Rightarrow (*)$ đúng (đ.p.c.m)

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$P(a, b, c) = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ac} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Đặt $q=ab+bc+ca$, $r=abc \Rightarrow 0 \leq q \leq 3$. Ta có bất đẳng thức tương đương với:

$$3r^2 + 2r(6-q) \leq 0$$

Theo bổ đề (1), ta có: $3r^2 + 2r(6-q) - q^2 \leq 3(x_1^2 y_1)^2 + (x_1^2 y_1)(6-q) - q^2$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta cần chứng minh :

$$3(x_1^2 y_1)^2 + (x_1^2 y_1)(6-q) - q^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P(x_1, x_1, y_1) \geq \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x_1+1} + \frac{y_1}{y_1 + (\frac{3-y_1}{2})^2} \geq \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{y_1+1} + \frac{4y_1}{y_1^2 - 2y_1 + 9} \geq \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow (y_1 - 1)^2(3 - y_1) \geq 0
\end{aligned}$$

Hiển nhiên đúng, do đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=3, b=c=0$ cùng các hoán vị.

2. Bài tập tự giải

1, Cho $a, b, c \geq 0$ Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq 2$

Hướng dẫn:

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 4$

Thật vậy, Chuẩn hóa $r=1$. Ta có

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q} + \frac{3\sqrt[3]{r}}{p} \geq 4 \Leftrightarrow p^3 + 3q \geq 4pq$$

Ta chứng minh được $q \geq 3$ kết hợp bất đẳng thức **Schur** ta có đpcm.

2, Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương và $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ thì

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

Hướng dẫn:

Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned}
&49 - 8(ab+bc+ca) + (a+b+c)abc \leq 64 - 16(ab+bc+ca) + 4(a+b+c)abc - a^2b^2c^2 \\
&\Leftrightarrow 16 + 3(a+b+c)abc \geq a^2b^2c^2 + 8(ab+bc+ca)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur và giả thiết $a^4 + b^4 + c^4 = 3$, ta có:

$$(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)(a + b + c) \geq (ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a))(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3abc(a + b + c) \geq (ab + bc)^2 + (bc + ca)^2 + (ca + ab)^2$$

Áp dụng BDT AM-GM, ta có:

$$(ab + bc)^2 + (bc + ca)^2 + (ca + ab)^2 + 12 \geq 8(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 15 + 3abc(a + b + c) \geq 8(ab + bc + ca)$$

Mặt khác ta lại có: $1 \geq a^2b^2c^2$. Vậy ta có đpcm.

3, Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh bất

đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \geq 10$

Hướng dẫn:

Áp dụng BDT Schur, ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (ab + bc + ca)(a + b + c) = pq = 3p$$

$$\text{và } r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{p(12 - p^2)}{9}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } 3p + \frac{p(12 - p^2)}{9} \geq 10 \Leftrightarrow \frac{(p - 3)[(16 - p^2) + 3(4 - p) + 2]}{9} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

4, Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{4 - bc} + \frac{b^2c}{4 - ca} + \frac{c^2a}{4 - ab} \leq 1$$

Hướng dẫn:

Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh:

$$4 - \sum a^2b \geq \sum \frac{a^2b^2c}{4 - bc}$$

Sử dụng bất đẳng thức quen biết, ta có:

$$1 \geq \sum \frac{ab}{4 - bc}$$

$$\Leftrightarrow 64 - 32 \sum ab + 8 \sum a^2bc + 4 \sum a^2b^2 \geq abc(\sum a^2b + abc)$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh:

$$64 - 32 \sum ab + 8 \sum a^2 bc + 4 \sum a^2 b^2 \geq 4abc$$

$$\text{hay } 16 - 8q + q^2 - r \geq 0$$

với $q = ab + bc + ca, r = abc$. Áp dụng BDT AM-GM, ta có $q^2 \geq 9r$ nên cần chứng minh:

$$16 - 8q + q^2 - \frac{q^2}{9} \geq 0 \Leftrightarrow (q-3)(q-6) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=2, b=1, c=0$ và các hoán vị.

5, Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3x}{x^2 + 2yz} + \frac{3y}{y^2 + 2zx} + \frac{3z}{z^2 + 2xy}$$

Hướng dẫn:

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum a \geq 3abc \sum \frac{1}{2a^2 + bc} \Leftrightarrow \sum \frac{a(a^2 - bc)}{2a^2 + bc} \geq 0 \Leftrightarrow 3 \sum \frac{a^3}{2a^2 + bc} \geq \sum a$$

$$\text{Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có } \sum \frac{a^3}{2a^2 + bc} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum a^3 + 3abc}$$

$$\text{Đến đây ta cần chứng minh } 3(\sum a^2)^2 \geq (\sum a)(2 \sum a^3 + 3abc)$$

Giả sử $a+b+c=1$ chuyển về dạng pqr BDT trở thành

$$3(1-2q)^2 \geq 2-6q+9r$$

Từ $q^2 \geq 3r$ ta có:

$$3(1-2q)^2 \geq 2-6q+3q^2$$

$$\Leftrightarrow 3-12q+12q^2 \geq 2-6q+3q^2$$

$$\Leftrightarrow (1-3q)^2 \geq 0$$

6, Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca \geq 8 \left(\sum_{cyc}^{a,b,c} a^2 + 16abc \right) \left(\sum_{cyc}^{a,b,c} a^2 b^2 \right)$$

Hướng dẫn:

Đặt $q = ab + bc + ca$, $r = abc \Rightarrow q, r \geq 0$ và $q \leq \frac{1}{3}$

Do đó theo bất đẳng thức Schur: $r \geq \frac{4q-1}{9}$. Từ cách đặt, ta có:

$$\sum_{cyc}^{a,b,c} a^2 b^2 = q^2 - 2r$$
$$\sum_{cyc}^{a,b,c} a^2 = 1 - 2q$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$q \geq 8(q^2 - 2r)(16r + 1 - 2q)$$
$$\Leftrightarrow f(r) = 8(2r - q^2)(16r + 1 - 2q) + q \geq 0$$

Ta có: $f'(r) = 6(32r - (4q - 1)(2q + 1))$

Có hai trường hợp xảy ra :

TH1: $1 \geq 4q \Rightarrow f'(r) \geq 0 \Rightarrow f(r)$ là hàm đồng biến $\forall r \geq 0$

TH2: $1 \leq 4q \Rightarrow r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$. Do đó:

$$f'(r) = 6(32r - (4q - 1)(2q + 1)) \geq 6\left(\frac{32(4q-1)}{9} - (4q-1)(2q+1)\right) = \frac{2(4q-1)(23-18q)}{3} \geq 0$$

do vậy $f(r)$ là hàm đồng biến với mọi $r \geq 0$ do đó $f(r) \geq f(0) = q(4q-1)^2 \geq 0$.

7, Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 a^4 + b^4 c^4 + c^4 a^4 \leq 3$$

8, Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

9. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Chứng minh rằng: $12 + 9abc \geq 7(ab + bc + ca)$

10, Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

11, Chứng minh rằng với các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, ta có:

$$2(a + b + c) - abc \leq 10$$

12, Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$1 + \frac{3}{a + b + c} \geq \frac{6}{ab + bc + ca}$$

13, Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 12 \geq 3(a + b + c) + 3(ab + bc + ca)$$

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG S.O.S (SUM OF SQUARE)

Trần Thanh Bình

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG S.O.S (SUM OF SQUARE)

Chắc hẳn rằng đây không còn là một phương pháp quá xa lạ so với các bạn THPT, Đại học hiện nay, bởi nó đã được giới thiệu khá nhiều trong các tài liệu bất đẳng thức hay. Việc giải các bất đẳng thức đối xứng 3 biến xuất hiện rất nhiều trong các kì thi HSG địa phương, cũng như quốc gia, quốc tế và luôn là câu phân loại. Để giải được các bài toán ấy đòi hỏi một trí tuệ sáng tạo tuyệt vời, cũng như các kĩ thuật mà không phải ai cũng biết. Nhưng với SOS chỉ cần một vài bước biến đổi cùng với việc sử dụng tiêu chuẩn một cách khéo léo thì phần lớn các bất đẳng thức 3 biến đề nằm trong khả năng của bạn. Chúng ta sẽ đi tìm hiểu sức mạnh cũng như cách sử dụng phương pháp này ngay sau đây.

1. Lý thuyết và ví dụ

1.1 Định lý và các kĩ thuật phân tích

Như đã nói ở trên, quan trọng nhất trong phương pháp này chính là kĩ thuật phân tích. Chúng ta sẽ biến đổi và đưa bất đẳng thức về dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0. (*)$$

Vậy câu hỏi đặt ra là: 1, Có phải với bài toán nào cũng có thể phân tích về dạng trên không?

2, Làm thế nào để phân tích được như vậy?

Xin trả lời là:

1, Mọi đa thức hay phân thức đối xứng 3 biến (đa số không chứa căn) đều có khả năng phân tích về dạng (*), điều này đã được chứng minh trong cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức của Phạm Kim Hùng".

2, Đây có lẽ là vấn đề các bạn thắc mắc nhất: Để giải quyết vấn đề này , tôi xin trình bày một định lý quan trọng sau:

Định Lý: Giả sử rằng $M(a,b,c), N(a,b,c)$ là 2 đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn

nữa với mọi số thực dương x thì phân số $\frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} = t$, trong đó t là một hằng số.

Khi đó tồn tại một hàm số nửa đối xứng 3 biến $G(a,b,c)$ sao cho

$$F(a,b,c) = \frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} + \frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)} + \frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)} - 3t = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2$$

Từ định lý đó chúng ta có một kĩ thuật là tính giá trị tại dấu bằng của các phân thức đối xứng, sau đó trừ đi đúng giá trị vừa tìm được thì chắc chắn phân thức đã cho hoàn toàn phân tích được dạng cơ bản (*)

Một số ví dụ phân tích:

Ví Dụ 1: (Bất đẳng thức *Nesbitt*) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b+a-c}{2(b+c)} + \frac{b-a+b-c}{2(c+a)} + \frac{c-a+c-b}{2(a+b)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{2}(a-b) \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Luôn đúng với mọi a, b, c dương. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức *Nesbitt* là một bất đẳng thức quá quen thuộc, nhưng qua cách giải trên phần nào các bạn cũng có thể thấy vẻ đẹp trong cách phân tích về dạng (*). Tiếp theo chúng ta sẽ xét một ví dụ khác khó hơn và cũng ứng dụng cách phân tích trên.

Ví Dụ 2: Cho a, b, c là các số thực dương. CMR:

$$\frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + ac}{(c+a)^2} + \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Ta thấy dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.. Thay $a = b = c$ vào thì ta tính được ngay

$$\frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} = \frac{b^2 + ac}{(c+a)^2} = \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó ta có phân tích:

$$\frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + ac}{(c+a)^2} + \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} - \frac{1}{2} + \frac{b^2 + ac}{(c+a)^2} - \frac{1}{2} + \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2 + a^2 - c^2}{2(b+c)^2} + \frac{b^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2(a+c)^2} + \frac{c^2 - a^2 + c^2 - b^2}{2(b+a)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)(a+b) \left[\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(a+c)^2} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \frac{(a+b)(a+b+c)}{(b+c)^2 (a+c)^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng với $a, b, c > 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$..

Nhận xét: Bài toán trên có một cách giải sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* như sau:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^2 - b^2 + a^2 - c^2}{2(b+c)^2} + \frac{b^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2(a+c)^2} + \frac{c^2 - a^2 + c^2 - b^2}{2(b+a)^2} \geq 0 \quad (1)$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ Khi đó ta có 2 dãy đơn điệu cùng chiều

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a^2 - c^2 &\geq b^2 - a^2 + b^2 - c^2 \geq c^2 - a^2 + c^2 - b^2 \\ \frac{1}{2(b+c)^2} &\geq \frac{1}{2(a+c)^2} \geq \frac{1}{2(b+a)^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* Ta có ngay

$$VT_{(1)} \geq \frac{1}{6} (2a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2 - c^2 - a^2 + 2c^2 - b^2 - a^2) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right] = 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$..

Ví Dụ 3: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} \geq 3 + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải:

Sử dụng phân tích theo bất đẳng thức *Nesbitt* ta có:

$$\sum \frac{2a}{b+c} - 3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Do đó bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \left[\frac{1}{(a+c)(b+c)} - \frac{1}{(a+b+c)^2} \right] \geq 0$$

Dễ thấy $(a+c)(b+c) \leq (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}$

Tương tự $\frac{1}{(a+c)(b+a)} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}; \frac{1}{(b+a)(b+c)} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}$

Cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét BĐT trên có một cách chứng minh khác sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* và *AM-GM* như sau:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned} \sum \frac{2a}{b+c} &\geq 2 + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} \\ \Leftrightarrow \sum \frac{2a}{b+c} &\geq 2 + 3 - \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \\ \Leftrightarrow \sum \frac{2a}{b+c} + \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} &\geq 5 \end{aligned}$$

Theo *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\sum \frac{2a}{b+c} = \sum \frac{2a^2}{ab+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \quad (1)$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \leq 1 \quad (2)$$

Kết hợp (1)(2) và bất *AM-GM* ta có

$$\begin{aligned} & \sum \frac{2a}{b+c} + \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} - \frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \\ & \geq 2 \sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \cdot \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}} - 1 = 5 \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức khi $a=b=c$

Tóm lại: Cả 2 ví dụ trên ngoài cách sử dụng *S.O.S* đều có những cách khác sử dụng bất đẳng thức cổ điển. Cả 2 cách giải đều có những vẻ đẹp riêng của nó và tùy vào mỗi người thì lại có những cảm nhận khác nhau về 2 cách trên. Nhưng các bạn có thể thấy việc chứng minh bất đẳng thức theo kiểu phân tích bình phương hoàn toàn giải quyết được bài toán một cách ngắn gọn mà không cần sử dụng một bất đẳng thức phụ nào, và lại rất tự nhiên trong cách tư duy. Trên đây là phần đầu của vẻ đẹp trong phương pháp chứng minh *S.O.S*. Tiếp theo chúng ta sẽ đi sâu vào tìm hiểu phương pháp.

1.2. Các tiêu chuẩn và kỹ thuật sắp xếp biến

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (*)$$

Với các ví dụ trên, S_a, S_b, S_c đều là các số dương nên việc giải quyết bất đẳng thức quá dễ. Nhưng không phải lúc nào cũng có những kết quả hiển nhiên như vậy. Trong các trường hợp đó, chúng ta cần sử dụng các tiêu chuẩn cũng và cách sắp xếp biến để giải quyết trọn vẹn. Ta có các tiêu chuẩn sau:

- 1, Nếu $S_a, S_b, S_c \geq 0$ thì (*) đúng.
- 2, Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b; S_b + S_c; S_b + S_a \geq 0$ thì (*) đúng.
- 3, Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_a; S_c; S_a + 2S_b; S_c + 2S_b \geq 0$ thì (*) đúng.
- 4, Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b; S_c; a^2.S_b + b^2.S_a \geq 0$ thì (*) đúng.
- 5, Nếu $S_a + S_b + S_c \geq 0$ và $S_a.S_b + S_b.S_c + S_c.S_a \geq 0$ thì (*) đúng.

Sau đây là một số ví dụ khác:

Ví Dụ 4: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{8(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 48$$

Lời giải

Phân tích quen thuộc ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{8(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 48 \\ \Leftrightarrow & 8 \left[\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} - 3 \right] + 3 \left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (-8) \left[\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2+b^2+c^2} \right] + 3 \left[\frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{abc} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum (b-c)^2 \left[\frac{3}{bc} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 S_a + (c-a)^2 S_b + (a-b)^2 S_c \geq 0$$

Trong đó

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{3}{bc} - \frac{8}{a^2 + b^2 + c^2}; \\ S_b &= \frac{3}{ac} - \frac{8}{a^2 + b^2 + c^2}; \\ S_c &= \frac{3}{ab} - \frac{8}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $S_a \geq S_b \geq S_c$

Lại có

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{3}{ac} - \frac{8}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - 8ac}{ac(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{3(a^2 + 2c^2) - 8ac}{ac(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot ac - 8ac}{ac(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 0 \\ &\Rightarrow S_a \geq S_b \geq 0 \end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn 2, Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b; S_b + S_c; S_b + S_a \geq 0$ thì (*) đúng

Ta chỉ cần chứng minh $S_c + S_b \geq 0$

Thật vậy, ta thấy:

$$\begin{aligned} S_c + S_b &= 3 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \right) - \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{12}{a(b+c)} - \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot a(b+c)} - \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &\geq \frac{24\sqrt{2}}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{12\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví Dụ 5: Cho a,b,c dương chứng minh

$$\frac{2bc}{(b+c)^2} + \frac{2ac}{(a+c)^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{5}{2} \quad (1)$$

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{2bc}{(b+c)^2} - \frac{1}{2} + \frac{2ac}{(a+c)^2} - \frac{1}{2} + \frac{2ab}{(a+b)^2} - \frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2(ab+bc+ca)} - \frac{(b-c)^2}{2(b+c)^2} - \frac{(c-a)^2}{2(a+c)^2} - \frac{(a-b)^2}{2(b+a)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \left[\frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(b+a)^2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Khi đó

$$S_a = \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(b+c)^2}; S_b = \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+c)^2}; S_c = \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+b)^2}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ khi đó $S_c \geq S_b \geq S_a$

Ta thấy :

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{a^2+ac+ac} - \frac{1}{(a+c)^2} \geq 0 \\ &\Rightarrow S_c \geq S_b \geq 0 \end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn 4, Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b; S_c; a^2.S_b + b^2.S_a \geq 0$ thì (*) đúng.

Ta chỉ cần chứng minh $a^2.S_b + b^2.S_a \geq 0$.

Thật vậy:

$$a^2.S_b + b^2.S_a \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \left[\frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+c)^2} \right] + b^2 \left[\frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(b+c)^2} \right] \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a^2 \left[\frac{a^2 + c^2 + ac - bc - ab}{(ab + bc + ca)(a + c)^2} \right] + b^2 \left[\frac{b^2 + c^2 + bc - ab - ca}{(ab + bc + ca)(b + c)^2} \right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c^2 a^2}{(a + c)^2} + \frac{b^2 c^2}{(b + c)^2} + \frac{a^2 (a - b)(a + c)}{(a + c)^2} - \frac{b^2 (a - b)(b + c)}{(b + c)^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c^2 a^2}{(a + c)^2} + \frac{b^2 c^2}{(b + c)^2} + (a - b) \left[\frac{a^2}{(a + c)} - \frac{b^2}{(b + c)} \right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{c^2 a^2}{(a + c)^2} + \frac{b^2 c^2}{(b + c)^2} + (a - b)^2 \left[\frac{ab + bc + ca}{(a + c)(b + c)} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy ta có ĐPCM. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

NX: Việc sử dụng các tiêu chuẩn trong 2 ví dụ trên đã khẳng định vai trò của *S.O.S.* Với các số S_a, S_b, S_c trong đó tồn tại 1 số âm thì tiêu chuẩn chính là công cụ để hoàn thiện việc chứng minh một bất đẳng thức. Có thể nói rằng, nếu bất đẳng thức cần chứng minh là đúng thì luôn tồn tại cách sử dụng 1 trong 6 tiêu chuẩn đã nói để chứng minh. Vì vậy việc còn lại là rèn luyện kỹ năng phân tích và sử dụng các bất đẳng thức phụ đơn giản để chứng minh tiêu chuẩn.

Để kết thúc phần sử dụng tiêu chuẩn, ta sẽ giải một bất đẳng thức khó sau.

Ví Dụ 7: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^6 \geq \frac{729}{5} abc (a^3 + b^3 + c^3 + 2abc)$$

Lời giải:

Chuyển bất đẳng thức đã cho về dạng phân thức đồng bậc và sử dụng phân tích tổng bình phương, ta có:

$$(a + b + c)^6 \geq \frac{729}{5} abc (a^3 + b^3 + c^3 + 2abc)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq \frac{729}{5} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3+2abc}{(a+b+c)^3} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{abc} - 27 \geq 27 \left[\frac{27}{5} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3+2abc}{(a+b+c)^3} - 1 \right] \\
&\Leftrightarrow \sum (b-c)^2 \left[\frac{7a+b+c}{abc} - \frac{54}{5} \cdot \frac{11b+11c-4a}{(a+b+c)^3} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$S_a = \frac{7a+b+c}{abc} - \frac{54}{5} \cdot \frac{11b+11c-4a}{(a+b+c)^3}; S_b; S_c \text{ tương tự.}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ Khi đó $S_a \geq S_b \geq S_c$.

Theo tiêu chuẩn 2, nếu ta chỉ ra được $S_b + S_c \geq 0$ thì có thể suy ra $S_b \geq 0$ và từ đó ta cũng có $S_a \geq S_b \geq 0; S_a + S_b \geq 0$. Thật vậy:

$$S_b + S_c \geq 0 \Leftrightarrow 5(a+b+c)^3(a+4b+4c) - 27abc(22a+7b+7c) \geq 0$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
&5(a+b+c)^3(a+4b+4c) - 27abc(22a+7b+7c) \\
&\geq 5.4a(b+c)(a+b+c)(a+4b+4c) - 27abc(22a+7b+7c) \\
&\geq 80abc \cdot \frac{1}{b+c} \cdot (a+b+c)(a+4b+4c) - 27abc(22a+7b+7c) \\
&= abc \left[80 \cdot \frac{1}{b+c} \cdot (a+b+c)(a+4b+4c) - 27(22a+7b+7c) \right]
\end{aligned}$$

Do bất đẳng thức thuần nhất cho a,b,c nên ta hoàn toàn có thể chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó việc chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned}
&80 \cdot \frac{1}{b+c} \cdot (a+b+c)(a+4b+4c) - 27(22a+7b+7c) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 80 \cdot \frac{1}{3-a} \cdot 3[3+3(3-a)] - 27(7.3+15a) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 45a^2 - 152a + 131 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Vậy $S_b + S_c \geq 0$. Suy ra đpcm. Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

1.3. Ứng dụng tìm hằng số k tốt nhất

Ngoài việc để chứng minh bất đẳng thức đối xứng 3 biến với các hệ số có sẵn, S.O.S còn có thể giải quyết một lớp các bài toán khó tìm hằng số k tốt nhất, cũng như sáng tạo, làm mạnh thêm các bất đẳng thức đối xứng 3 biến.

Ta sẽ xét ví dụ

Ví Dụ 8: Cho $a, b, c > 0$. Tìm hằng số k lớn nhất cho bất đẳng thức sau đúng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k \quad (1)$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} &\geq 9+k \\ \Leftrightarrow \sum (b-c)^2 \left[\frac{1}{bc} - \frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)} \right] &\geq 0 (*) \end{aligned}$$

Ta có:

$$S_a = \frac{1}{bc} - \frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)}; S_b = \frac{1}{ac} - \frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)}; S_c = \frac{1}{ba} - \frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Tiếp theo ta sẽ cho điều kiện dấu '=' xảy ra của BDT là $b = c \neq a$

Khi đó (*) đúng khi và chỉ khi

$$2(a-b)^2 \left[\frac{1}{ab} - \frac{k}{2(a^2+2b^2)} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab} - \frac{k}{2(a^2+2b^2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+2b^2) - kab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2t + \frac{4}{t} - k \geq 0 \Leftrightarrow 2t^2 - kt + 4 \geq 0$$

Với $t = \frac{a}{b}$; Để BĐT cuối đúng với mọi t , thì $k^2 - 4.4.2 \leq 0 \Leftrightarrow k \leq 4\sqrt{2}$

Ta sẽ chứng minh BĐT đúng với $k = 4\sqrt{2}$. Khi đó giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} - \frac{4\sqrt{2}}{(a^2+b^2+c^2)} = \frac{(b+c)(a^2+b^2+c^2) - 4\sqrt{2}.abc}{abc(a^2+b^2+c^2)} \\ &\geq \frac{2\sqrt{bc}(a^2+2bc) - 4\sqrt{2}abc}{abc(a^2+b^2+c^2)} = \frac{2(a-\sqrt{2bc})^2}{abc(a^2+b^2+c^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy theo tiêu chuẩn 2 ta có đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = \sqrt{2}b = \sqrt{2}c$. Hằng số k lớn nhất là $4\sqrt{2}$.

NX: Chắc hẳn các bạn sẽ phát hiện ra ngay, việc làm trên chính là cách làm mạnh bất đẳng thức quen thuộc $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, từ đó ta đã sáng tạo riêng cho bản thân một bất đẳng thức đẹp và chặt hơn so với bài toán gốc. Đây chính là một sức mạnh đặc biệt của *S.O.S* mà không phải phương pháp nào cũng có.

2. Bài tập tự giải

1, Cho $a, b, c \geq 0$. CMR:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5$$

Hướng dẫn:

Làm tương tự **VD4**:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5 \Leftrightarrow \sum (c-a)^2 \left[\frac{a+b+c}{2abc} - \frac{7b+c+a}{(a+b+c)^3} \right] \geq 0$$

Sau đó làm tiếp theo tiêu chuẩn 1.

2, Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. CMR:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c} \geq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

Hướng dẫn:

BĐT đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} ab+bc+ca - \frac{3abc}{a+b+c} &\geq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2} \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca - \frac{9abc}{a+b+c} &\geq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2} - \frac{6abc}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow \sum (b-c)^2 a(c^2+b^2+2bc-ca-ab) &\geq 0 \end{aligned}$$

Sau đó áp dụng tiêu chuẩn 4 với $a \geq b \geq c$

$$a^2S_b + b^2S_a \geq 0 \Leftrightarrow ab \left[(a-b)^2(a+b) + 2c(a^2+b^2-ab) + c(a^2+b^2) \right] > 0$$

3, Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hướng dẫn:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b \right) &\geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &\Leftrightarrow \sum (a - b)^2 \left[\frac{a^2 + c^2 - ab}{b(a^2 + b^2 + c^2)} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

* Nếu $a \geq b \geq c$ chứng minh $S_c + 2S_b \geq 0$ và sử dụng tiêu chuẩn 3

* Nếu $c \geq b \geq a$ chứng minh $S_b + S_c \geq 0$ và sử dụng tiêu chuẩn 2

4, Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. CMR:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a + b + c + 2) \leq 5 + \frac{2}{abc}$$

Hướng dẫn:

Quy đồng và đưa về dạng đa thức, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a + b + c + 2) &\leq 5 + \frac{2}{abc} \\ &\Leftrightarrow (a + b + c + 2)(ab + bc + ca) \leq 5abc + 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2abc) \\ &\Leftrightarrow (a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2abc) - 2(ab + bc + ca) - 4abc \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(b-c)^2 + (1-b)(c-a)^2 + (1-c)(a-b)^2 \geq 0$$

Ta có:

$$S_a + S_b + S_c = 3 - a - b - c > 0$$

$$S_a S_b + S_b S_c + S_a S_c = ab + bc + ca + 3 - 2(a + b + c) > 0$$

Và áp dụng tiêu chuẩn 5, ta có đpcm.

5, Tìm hằng số k tốt nhất sao cho BĐT sau đúng với $a; b; c \geq 0$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(a+c)(b+c)} + k \frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{8} + k$$

Hướng dẫn:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(a+c)(b+c)} + k \frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{8} + k$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(a+c)(b+c)} - \frac{3}{8} + k \left[\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} - 1 \right] \geq 0 + k$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \left[\frac{4a+4b+c}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{k}{2(a+b+c)^2} \right] \geq 0$$

Sau đó: thay $a=b$ vào và tìm được hằng số k tốt nhất là $\frac{5}{2}$.

Sau đó thay ngược lại và chứng minh BĐT đúng với $k = \frac{5}{2}$

Ta có

$$S_c = \frac{4a+4b+c}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{5}{4(a+b+c)^2}$$

$$S_b = \frac{4c+4a+b}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{5}{4(a+b+c)^2}$$

$$S_a = \frac{4c+4b+a}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{5}{4(a+b+c)^2}$$

Giả sử $c \geq b \geq a \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$

Khi đó ta cần chứng minh

Ta thấy

$$20(a+b)(b+c)(c+a) \leq 5(b+c)(2a+b+c)^2$$

Nên chỉ cần chứng minh

$$(5b+5c+8a)(a+b+c)^2 \geq 5(b+c)(2a+b+c)^2 \quad (1)$$

Bất đẳng thức (1) thuần nhất với a,b,c nên có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$. Thế vào ta có

$$5+3a \geq 5(1-a)(1+a)^2 \Leftrightarrow a(5a^2+5a-2) \geq 0 \quad (\text{Đúng do } a \geq \frac{1}{3})$$

Vậy BĐT được chứng minh.

6, Cho $a, b, c > 0$ sao cho $ab+bc+ca \neq 0$.CMR:

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$$

7, Cho $a, b, c > 0$ thỏa $ab + bc + ca = 1$. CMR

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

Hướng dẫn:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{2(a+b+c+\sqrt{3})} - 1 \right] \geq 0$$

Sau đó sử dụng tiêu chuẩn 5 để chứng minh bất đẳng thức.

3. Mở rộng

Có thể nói đây chính là một tài liệu hữu ích cho các bạn khi nghiên cứu về phương pháp phân tích tổng bình phương $S.O.S$. Một phương pháp mạnh trong việc giải các bài toán đối xứng 3 biến, các bài toán tìm hằng số tối ưu. Nhưng tất cả các phương pháp đều có điểm mạnh và điểm yếu của nó. $S.O.S$ cũng không ngoại lệ. Về điểm mạnh đã được chúng ta phân tích ở trên, còn về điểm yếu của $S.O.S$ chính là các BĐT chứa căn và các bất đẳng thức hoán vị vòng quanh. Đối với các bất đẳng thức chứa căn thì phải có thêm 1 bước trục căn thức để hình thành nhân tử, điều này làm cho S_a, S_b, S_c rất cồng kềnh và khó giải quyết. Đối với các bất đẳng thức hoán vị vòng quanh cũng vậy. Vì thế, trên cơ sở của phương pháp $S.O.S$, người ta tìm pháp kết hợp $S.O.S$ với bất đẳng thức $Schur$),

Ngoài ra kỹ năng phân tích $S.O.S$ còn tham gia vào các phương pháp chứng minh BDT khác và trở thành kỹ năng cần có trong việc giải bất đẳng thức. Như các phương pháp Biến đổi tương đương, phương pháp Dồn biến, phương pháp tiếp tuyến, UCT,.... Việc nắm bắt và vận dụng tốt $S.O.S$ là rất quan trọng. Ngoài sức mạnh chứng minh bất đẳng thức đối xứng 3 biến, nó còn giúp bạn hoàn thiện các phương pháp chứng minh khác, góp phần sáng tạo hơn trong kho tàng bất đẳng thức của thế giới.

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP S.O.S TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Đặng Ngọc Tuấn

1. Lời nói đầu

S.O.S là một phương pháp chứng minh khá hiệu quả trong những bất đẳng thức ba biến, nó làm chúng ta bất ngờ bởi cách giải độc đáo, mà có thể những cách giải khác không thể chứng minh được. Bây giờ chúng ta hãy đi khám phá vẻ đẹp của phương pháp này.

2. Xây dựng định lý, tiêu chuẩn

Xét biểu thức:

$$S = f(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 (*)$$

Để chứng minh $S \geq 0$, đơn giản nhất là cả ba biểu thức S_a, S_b, S_c đều không âm, nhưng định lý S.O.S còn giúp ta giải quyết được vấn đề ngay cả khi một hoặc hai trong ba biểu thức S_a, S_b, S_c là âm, hoặc khó đánh giá được dấu của chúng. Khi đó chỉ cần thỏa mãn một trong các tiêu chuẩn sau thì (*) được chứng minh hoàn toàn

1. $S_a, S_b, S_c \geq 0$
2. $a \geq b \geq c; S_b \geq 0, S_b + S_a \geq 0, S_b + S_c \geq 0$
3. $a \geq b \geq c; S_a \geq 0, S_c \geq 0, S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0$
4. $a \geq b \geq c; S_b \geq 0, S_c \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$
5. $S_a + S_b + S_c \geq 0; S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$
6. $a \leq b \leq c, S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0, S_a + S_b \geq 0$

Một số đẳng thức liên hệ giữa S_a, S_b, S_c để dễ dàng thực hiện các tiêu chuẩn:

*

$$\begin{aligned}
& 2[S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2](S_a + S_b + S_c) \\
&= [(a-c)S_b - (a-b)S_c]^2 + [(b-a)S_b - (b-c)S_a]^2 \\
&+ [(c-b)S_a - (c-a)S_b]^2 \\
&+ 2(S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
\end{aligned}$$

**

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 = \frac{[(a-c)S_b - (a-b)S_c]^2 + (b-c)^2(S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a)}{S_b + S_c}$$

Bây giờ chúng ta nhận được những hệ quả độc đáo từ các đẳng thức:

Hệ quả 1:

$$\begin{aligned}
& 2[S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2](S_a + S_b + S_c) \\
&\geq (S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
\end{aligned}$$

Với mọi S_a, S_b, S_c .

Hệ quả 2 :

Nếu $S_a + S_b + S_c \leq 0; S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ khi đó bất đẳng thức đổi chiều, tức là:

$$S = f(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \leq 0$$

3. Phân tích cơ sở

$$1. \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$$

$$2. \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$3. \quad \frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a-b)^2}{b}$$

$$4. \quad \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - a^2 - b^2 - c^2 = \sum \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2} \right) (a-b)^2$$

$$5. \quad \frac{a^2b}{c} + \frac{b^2c}{a} + \frac{c^2a}{b} - ab - bc - ca = \sum \frac{c(a-b)^2}{a}$$

$$6. \quad \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} - a^2 - b^2 - c^2 = \sum (a-b)^2 \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^2$$

$$7. \quad (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - (a+b+c)^2 = \sum \frac{(a-b)^2 [2(a^2 + bc) + ab]}{2ab}$$

$$8. \quad (a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$$

$$9. \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right)$$

$$10. \quad \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bên cạnh những phân tích cơ sở này còn rất nhiều phân tích khác mà bạn đọc có thể tìm thấy trong quá trình giải toán.

4. Các ứng dụng của phương pháp S.O.S

Bài toán 1: Cho a,b,c là các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a}{a+b} + \frac{4b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc}{a^2b + b^2c + c^2a + abc} \geq 7$$

Lời giải: Theo cách phân tích cơ sở 3 và 5 bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\begin{aligned} & 4 \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} - \frac{3}{2} \right) + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc}{a^2b + b^2c + c^2a + abc} - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b + b^2c + c^2a + abc} - 2 \cdot \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)(b-c)(c-a) \left[(a+b)(b+c)(c+a) - 2(a^2b + b^2c + c^2a + abc) \right]}{(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\left[(a-b)(b-c)(c-a) \right]^2}{(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng .

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Lời giải trên thế nào, các bạn ngạc nhiên phải không, quả là thú vị phải không ?, S.O.S làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn. Chưa dừng lại ở đó , S.O.S lại làm cho bài toán tưởng chừng như không giải được thành bài toán đơn giản chỉ qua một số phép đánh giá thông thường.

Bài toán 2. Cho các số thực dương a, b, c , Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{3 \left[2(a^2b + b^2c + c^2a) - abc \right]}{2 \left[2(ab^2 + bc^2 + ca^2) - abc \right]} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải: Do tính hoán vị nên ta phải xét hai trường hợp:

TH1: $a \geq b \geq c$:

Ta có: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$ nên ta cần chứng minh:

$$\frac{2(a^2b + b^2c + c^2a) - abc}{2(ab^2 + bc^2 + ca^2) - abc} \geq 1 \Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$$

Hiển nhiên đúng , dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

TH2: $c \geq b \geq a$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại như sau:

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{6(a-b)(b-c)(c-a)}{2(ab^2 + bc^2 + ca^2) - abc}$$

Ta có:

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{ab + bc + ca} = \frac{2 \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{6(c-b)(b-a)}{ab + bc + ca}$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ab+bc+ca} &\geq \frac{c-a}{2(ab^2+bc^2+ca^2)-abc} \\
&\Leftrightarrow 2(ab^2+bc^2+ca^2)-abc \geq (c-a)(ab+bc+ca) \\
&\Leftrightarrow 2(ab^2+bc^2+ca^2)-abc-abc-bc^2-ac^2+a^2b+abc+ca^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 2ab^2+bc^2+3ca^2-abc+a^2b-ac^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow ba^2+2ab^2+2ca^2+(c^2b-abc-c^2a+ca^2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow ba^2+2ab^2+2ca^2+c(b-a)(c-a) \geq 0
\end{aligned}$$

Hiển nhiên đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a+b+c+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải: Áp dụng phân tích cơ sở 3: $\frac{a^2}{b}-2a+b=\frac{(a-b)^2}{b}$ biến đổi, bất đẳng thức

tương đương với :

$$\frac{a^2}{b}-2a+b+\frac{b^2}{c}-2b+c+\frac{c^2}{a}-2c+a \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \geq 6 \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} - \frac{a+b+c}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{2}{a+b+c} \sum_{cyc} (a-b)^2$$

$$\text{Đặt: } S_a = \frac{a+b}{c}-1, \quad S_b = \frac{b+c}{a}-1, \quad S_c = \frac{a+c}{b}-1.$$

Áp dụng đẳng thức:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 = \frac{[(a-c)S_b - (a-b)S_c]^2}{S_b+S_c} + (b-c)^2 (S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $S_b+S_c \geq 0$ và $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$.

Ta có:

$$\begin{cases} S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a = 3 + \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)}{abc} \geq 0 \\ S_b + S_c = \frac{(a-b)^2}{ab} + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 0 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Schur thì : $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) \geq 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài toán 4: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 33$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 6 + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 27 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2 - 27(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{abc} - \frac{9[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \left(\frac{a+b+c}{abc} - \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Theo AM-GM : $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$ nên (*) hiển nhiên đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài toán 5 : Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh:

$$(a-b)(b-c)(c-a) + 2 \geq \frac{2}{3}(ab+bc+ca)$$

Lời giải:

Do $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ nên $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

Theo bài ra ta cũng có: $6 - 2(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 + 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2(a-b+1) + (b-c)^2(b-c+1) + (c-a)^2(c-a+1) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt $S_a = b - c + 1$, $S_b = c - a + 1$, $S_c = a - b + 1$

Khi đó $S_a + S_b + S_c = 3$ và:

$$S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a = ab + ca + bc + 3 - a^2 - b^2 - c^2 = ab + bc + ca > 0$$

Từ đó theo tiêu chuẩn 5 thì bất đẳng thức đã được chứng minh xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 6: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Chứng minh :

$$(a + b + c + 2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 5 + \frac{2}{abc}$$

Bài toán nhìn qua có vẻ không đụng chạm đến S.O.S, mặc dù điều kiện bài toán như lượng giác, nhưng chúng ta vẫn có thể sử dụng phương pháp này để chứng minh.

$$(a + b + c + 2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 5 + \frac{2}{abc}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 5 + \frac{2}{abc} - 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 \leq \frac{2}{abc} - 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 4$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2abc) - 2(ab + bc + ca) - 4abc$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \leq (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-c)^2 + (b-1)(c-a)^2 + (c-1)(a-b)^2 \leq 0 \quad (*)$$

Do $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ nên $a \leq 1; b \leq 1; c \leq 1$ do đó (*) luôn đúng, vậy bài toán được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi hai trong 3 số a, b, c bằng 1, số còn lại bằng -1

5. Bài tập vận dụng

Bài 1: với a, b, c là các số thực khác 0. Chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 15 \geq 4 \left(\frac{a+b}{c} + \frac{c+b}{a} + \frac{a+c}{b} \right)$$

Gợi ý: Sử dụng phân tích cơ sở 3 đưa bất đẳng thức về dạng: $\sum_{cyc} \frac{(a-c)^4}{a^2 c^2} \geq 0$ (Đúng)

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$$

Gợi ý: Sử dụng phân tích cơ sở 7 đưa bất đẳng thức về dạng

$$(b-c)^2(2b^2a + 2a^2c - 2abc) + (a-b)^2(2a^2c + 2c^2b - 2abc) + (c-a)^2(2c^2b + 2b^2a - 2abc)$$

Công việc đến đây khá dễ dàng, sử dụng các tiêu chuẩn 3 và 6 ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sum_{cyc} a^6 + 3 \sum_{cyc} a^3 b^3 + 2abc \sum_{cyc} a^3 \geq \sum_{cyc} ab(a^4 + b^4) + \sum_{cyc} a^2 b^2 (a^2 + b^2) + abc \cdot \sum_{cyc} ab(a+b)$$

Gợi ý: Đưa bất đẳng thức về dạng : $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$

$$\text{Trong đó: } \begin{cases} S_a = b^4 + c^4 - 3b^2c^2 + 2abc(b+c) \\ S_b = a^4 + c^4 - 3a^2c^2 + 2abc(a+c) \\ S_c = b^4 + a^4 - 3b^2a^2 + 2abc(a+b) \end{cases}$$

Sau đó sử dụng tiêu chuẩn 2.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực thuộc khoảng $[3; 4]$. Chứng minh:

$$\frac{\sum_{cyc} a^2 b^2 - abc(a+b+c)}{abc} \geq \frac{3 \sum_{cyc} a^2 - (a+b+c)^2}{a+b+c}$$

Gợi ý: Đưa bất đẳng thức về dạng : $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$

$$\text{Trong đó: } \begin{cases} S_a = \frac{a}{bc} - \frac{2}{a+b+c} \\ S_b = \frac{b}{ac} - \frac{2}{a+b+c} \\ S_c = \frac{c}{ba} - \frac{2}{a+b+c} \end{cases}$$

Sử dụng tiêu chuẩn 2.

Bài 5: Cho a, b, c là ba cạnh tam giác . Chứng minh :

$$A = a^2 \left(\frac{b}{c} - 1 \right) + b^2 \left(\frac{c}{a} - 1 \right) + c^2 \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \geq 0$$

Gợi ý:

Chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$a^2 \left(\frac{b}{c} - 1 \right) + b^2 \left(\frac{c}{a} - 1 \right) + c^2 \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \geq \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} ab = \frac{1}{2} \left[\sum_{cyc} (a-b)^2 \right]$$

Sau đó đưa bất đẳng thức về dạng: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$

$$\text{Trong đó: } \begin{cases} S_a = \frac{2a-b}{b} \\ S_b = \frac{2b-c}{c} \\ S_c = \frac{2c-a}{a} \end{cases}$$

Do a, b, c hoán vị vòng quanh nên ta xét hai trường hợp:

TH1 $b+c \geq a \geq b \geq c$ khi đó $S_a \geq 0; S_c \geq 0$ và ta chứng minh được $S_b + S_c \geq 0$ nên $A \geq 0$

TH2: $a \leq b \leq c \leq a+b \leq 2b$ khi đó $S_b \geq 0; S_c \geq 0$ và ta dễ chứng minh $S_a + S_b \geq 0$ nên $A \geq 0$

Bài 6: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)}$$

Gợi ý: Sử dụng phân tích cơ sở 7 và biến đổi:

Bình phương cả hai vế, bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \right) \left[\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + 3(a+b+c) \right] \geq 4 \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2 [2(a^2 + bc) + ab]}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + 3(a+b+c)}{b} - \frac{4(a^2 + bc) + 2ab}{ab} \right) \geq 0$$

6. Bài tập dành cho bạn đọc

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực, chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b)(3a+b)}{a^2+b^2} + \frac{(b-c)(3b+c)}{b^2+c^2} + \frac{(c-a)(3c+a)}{c^2+a^2} \geq 0$$

Bài 2: Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{b^2}{c} \right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a} \right)^2 + \left(c + \frac{a^2}{b} \right)^2 \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a+b+c}$$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

a) $\sum_{cyc} a^4(a-b) \geq 2abc \sum_{cyc} a(a-b)$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \geq 2(ab + bc + ca)$

Bài 4: Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có:

$$\frac{4(a^2 + bc)}{b^2 + c^2} + \frac{4(b^2 + ac)}{c^2 + a^2} + \frac{4(c^2 + ab)}{a^2 + b^2} \geq 3 + \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có:

$$\frac{a^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + a^3} \geq \frac{a + b + c}{2}$$

Bài 6: Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bình phương bằng 3. Chứng minh:

$$\frac{1}{3 - ab} + \frac{1}{3 - bc} + \frac{1}{3 - ca} + \frac{1}{3 - a^2} + \frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2} \geq 3$$

TƯ LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Sáng tạo bất đẳng thức - Phạm Kim Hùng.
- [2]. Những viên kim cương trong bất đẳng thức - Trần Phương.
- [3]. Algebraic Inequalities - Vasile Cirtoaje.
- [4]. Chuyên đề bất đẳng thức hiện đại - Võ Quốc Bá Cẩn.
- [5]. diendantoanhoc.net
- [6]mathscope.org

PHƯƠNG PHÁP DÒN BIẾN

Trần Đình Phước Anh- Nguyễn Trường Nhật

1. Kiến thức liên quan

Với các bài toán bất đẳng thức mà cực trị đạt được khi một số biến bằng nhau (ta gọi là cực trị có tính đối xứng) hoặc một số biến đạt giá trị tại biên của miền xác định thì phương pháp dồn biến thực sự là một phương pháp rất mạnh và hiệu quả. Ý tưởng chính của phương pháp có thể nói ngắn gọn như sau: bất đẳng thức đã cho đúng với mọi giá trị của biến số trên miền xác định nên cũng sẽ đúng khi có một số biến bằng nhau (hoặc một số biến đạt giá trị tại biên), vì thế chúng ta sẽ tìm cách chứng minh đẳng thức xảy ra khi một số biến bằng nhau (hoặc một số biến đạt giá trị tại biên) và số biến của bài toán sẽ giảm đi làm cho công việc chứng minh của chúng ta nhẹ nhàng hơn nhiều. Nội dung của phương pháp được thể hiện rõ ràng hơn qua định lý sau đây:

Định lý về dồn biến: *Giả sử $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ là một hàm số liên tục và đối xứng với tất cả các biến xác định trên một miền liên thông thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\right) \quad (*)$$

(Từ giờ ta sẽ gọi bất đẳng thức () là bất đẳng thức điều kiện)*

Khi đó thì bất đẳng thức sau sẽ thỏa mãn:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq f(x, x, x, \dots, x)$$

$$\text{Với } x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Bất đẳng thức điều kiện còn có thể biến đổi về một số dạng khác như sau:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &\geq f\left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n\right) \\
f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &\geq f\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, x_3, \dots, x_n\right) \\
f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &\geq f\left(\sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m}{2}}, \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m}{2}}, x_3, \dots, x_n\right) \\
&\dots
\end{aligned}$$

Và tương ứng khi đó thì x cũng có thể nhận một số giá trị khác như:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} \\
x &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}} \\
x &= \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + x_3^m + \dots + x_n^m}{n}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ví dụ kinh điển nhất cho việc sử dụng định lý này chính là bất đẳng thức AM-GM:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} \text{ với } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Đặt $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - n \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$ ta dễ dàng có được

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq f\left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n\right) \text{ (điều này tương đương } (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0)$$

Áp dụng **Định lý về dồn biến** ta có ngay

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq f\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}, \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}, \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}, \dots, \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}\right) = 0 \text{ (đpcm).}$$

Tuy nhiên hầu hết các bất đẳng thức chúng ta gặp phải đều không thể sử dụng định lý trên một cách đơn giản như vậy, việc chứng minh bất đẳng thức điều kiện thường đòi hỏi chúng ta nhiều kỹ năng hơn. Định lý S.M.V (Stronger Mixing Variable) ra đời để giải quyết những khó khăn như vậy, trước khi đi đến nội dung của định lý ta sẽ xét bổ đề:

Bổ đề: Giả sử $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là dãy số thực tùy ý. Thực hiện liên tiếp phép đổi Δ xác định như sau:

1. Chọn $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho $a_i = \min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ và $a_j = \max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

2. Thay a_i, a_j bởi $\frac{a_i + a_j}{2}$ nhưng vẫn giữ đúng thứ tự của chúng trong dãy số.

Khi đó thì sau khi thực hiện vô hạn lần phép biến đổi Δ thì mỗi số $a_i; \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

đều tiến đến giới hạn:

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

(Ở đây phép biến đổi Δ có thể thay bởi các đại lượng trung bình khác đều được)

Chứng minh(Trích theo [1]): Kí hiệu dãy ban đầu là $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1)$, sau phép biến đổi Δ ta thu được dãy $(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2)$, cứ như thế từ dãy $(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$ sau phép biến đổi Δ ta thu được dãy $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, \dots, a_n^{k+1})$ (Ở đây không được hiểu a_i^k là a_i lũy thừa k). Khi đó với mọi số nguyên $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ta phải chứng minh rằng:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = a \text{ với } a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{Đặt } m_k = \min\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\} \text{ và } M_k = \max\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}.$$

Dễ thấy rằng dãy (m_k) là một dãy không giảm (Do qua phép biến đổi Δ với dãy $(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$ thì không có phần tử nào của dãy nhỏ hơn m_k), dãy (M_k) là một dãy không tăng (Do qua phép biến đổi Δ với dãy $(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$ thì không có phần tử nào của dãy lớn hơn M_k). Hơn nữa vì (m_k) và (M_k) đều không nhỏ hơn $\min\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$ và cũng không lớn hơn $\max\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$ (bị chặn) nên suy ra cả 2 dãy đều hội tụ.

$$\text{Đặt } m = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k \text{ và } M = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k.$$

Ta cần chứng minh rằng $M = m$. Giả sử như $M > m$. Đặt $d_k = M_k - m_k$.

Ta có một nhận xét sau đây:

Nhận xét: Giả sử sau một số phép biến đổi Δ dãy $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1)$ trở thành dãy

$$(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) \text{ sao cho } m_k = \frac{M_1 + m_1}{2} \text{ thì } m_2 = \frac{M_1 + m_1}{2}.$$

Thật vậy không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $M_1 = a_1^1 \geq a_2^1 \geq \dots \geq a_n^1 = m_1$. Nếu

$$m_k = \frac{M_1 + m_1}{2} = \frac{a_1^1 + a_n^1}{2} \text{ và } k \text{ là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn thì } a_i^2 \geq m_k \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

(Do (m_k) là dãy không giảm) hơn nữa $m_k = \frac{a_1^1 + a_n^1}{2}$ là một phân tử của dãy

$(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2)$ nên ta suy ra $m_2 = m_k = \frac{M_1 + m_1}{2}$. Vậy nhận xét đã được chứng minh.

Áp dụng nhận xét trên ta suy ra một kết quả mạnh hơn. Đặt:

$$S = \{k : \exists l > k \mid m_k + M_k = 2m_l\} \Rightarrow S = \{k \mid m_k + M_k = 2m_{k+1}\}$$

$$P = \{k : \exists l > k \mid m_k + M_k = 2M_l\} \Rightarrow P = \{k \mid m_k + M_k = 2M_{k+1}\}$$

Nếu S hoặc P có vô hạn phân tử, giả sử $|S| = +\infty$, khi đó với mỗi $k \in S$ thì:

$$d_{k+1} = M_{k+1} - m_{k+1} = M_{k+1} - \frac{M_k + m_k}{2} \leq \frac{M_k - m_k}{2} = \frac{d_k}{2}$$

$$\Rightarrow d_{k+1} \leq \frac{d_1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$$

$$\Rightarrow M = m$$

Nếu cả S và P đều có hữu hạn phân tử, ta có thể giả sử ngay $|S| = |P| = 0$ mà

không làm mất tính tổng quát của bài toán. Khi đó với mọi $k > 1$ thì số $\frac{a_1^1 + a_n^1}{2}$

không thể là phân tử nhỏ nhất hay lớn nhất trong dãy $(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$ và vì thế ta chỉ

cần xét bài toán với $n-1$ phân tử (bỏ đi phân tử $\frac{a_1^1 + a_n^1}{2}$). Theo nguyên lý quy nạp ta

có điều phải chứng minh.

Vậy trong mọi trường hợp bổ đề đều được chứng minh.

Phép chứng minh trên của bổ đề các bạn có thể theo dõi nhằm mục đích tham khảo là chủ yếu chứ không cần quá chú trọng chi tiết, ta quan tâm nhiều hơn đến một hệ quả trực tiếp của bổ đề trên mà trong một lớp rất rộng các bài toán bất đẳng thức nó sẽ mở ra cho ta một con đường vô cùng sáng sủa:

Định lý S.M.V: Nếu $f: I \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, I = [\alpha, \beta]^k; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ là một hàm liên tục đối xứng và bị chặn dưới thỏa mãn điều kiện

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \geq f(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

Trong đó $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ là dãy thu được từ dãy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ qua phép biến đổi Δ thì ta có: $f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \geq f(a, a, a, \dots, a)$ với $a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$.

Định lý này cho chúng ta một cách tiếp cận rất hay đối với các bài toán sử dụng phương pháp dồn biến khi chỉ cần chọn ra biến nhỏ nhất và biến lớn nhất. Nhưng ngay cả khi không thể chứng minh được bất đẳng thức điều kiện khi $a_i = \min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ và $a_j = \max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ vẫn thu được những kết quả rất tốt. Chẳng hạn như ta đã chứng minh được rằng $f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \geq f(a, a, \dots, a, a_{k+1}, \dots, a_n)$ với $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ thì ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp có k biến bằng nhau, điều này rõ ràng đã đơn giản hơn rất nhiều.

2. Ví dụ minh họa

Để mở đầu cho phần này trước tiên ta xét bài toán khá nổi tiếng sau:

Ví dụ 1 ([3]): Cho $a, b, c \geq 0$ và chỉ có tối đa 1 số bằng 0.

Chúng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức hay và đẹp, trước tiên ta sẽ giải quyết nó bằng cách sử dụng bất đẳng thức cổ điển mà cụ thể là bất đẳng thức AM-GM.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$

Xây dựng 2 bất đẳng thức tương tự và cộng lại ta có điều phải chứng minh.
Dấu đẳng thức chỉ khi $a=0, b=c$ hoặc các hoán vị tương ứng của bộ số này.

Lời giải trên thật sự rất ấn tượng và ngắn gọn, nhưng trong khuôn khổ bài viết này chúng ta sẽ không dừng lại ở đây mà sẽ đi tìm lời giải khác mang tư tưởng dồn biến, tuy rằng có thể sẽ dài dòng và phức tạp hơn nhưng không phải là không có ý nghĩa.

Khi bắt đầu bước vào chứng minh một bất đẳng thức nào đó, công việc trước tiên của chúng ta hầu như đều là dự đoán điểm rơi của dấu đẳng thức. Trong bài toán này, điều kiện "không âm" của các biến và "chỉ có tối đa 1 số bằng 0" dường như đã gợi ý cho ta vấn đề này, và quả đúng dấu đẳng thức xảy ra tại một biến bằng 0, hai biến còn lại bằng nhau. Vì thế nên cả hai việc dồn biến ra biên và dồn biến về tâm đều có khả năng áp dụng được.

Ta sẽ thử dồn biến về tâm trước.

Giải: Đặt $f(a,b,c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$. Ta sẽ CMR

$$f(a,b,c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \quad (**)$$

Với $c = \min\{a,b,c\}$

(Đánh giá như thế để đảm bảo tổng $a+b+c$ không đổi)

Thật vậy (**) tương đương:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$$

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=2$. Bất đẳng thức cần cm trở thành:

$$\sqrt{\frac{a}{2-a}} + \sqrt{\frac{b}{2-b}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{4-a-b}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2-a}} + \sqrt{\frac{b}{2-b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{2-a}} + \sqrt{\frac{b}{2-b}}\right)[a^2(2-a) + b^2(2-b)] \geq (a+b)^3$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b)^3}{a^2(2-a) + b^2(2-b)} \geq \frac{4(a+b)}{4-(b+a)}$$

Khai triển và rút gọn, ta cần chứng minh $(a-b)^2[3(a+b)-4] \geq 0$ (1)

Mặt khác do $c = \min\{a, b, c\}$ nên $c \leq \frac{2}{3} \Rightarrow a+b \geq \frac{4}{3}$

Do đó bất đẳng thức (1) đúng. Giờ ta chỉ cần phải chứng minh trong trường hợp

$a=b$ tức là cần chứng minh: $2\sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{2a}} \geq 2$. Không mất tính tổng quát giả sử $a+c=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1-a}{2a}} \geq 2 \quad (a \in [0,1])$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2\sqrt{2a} + \sqrt{1-a} \geq 2\sqrt{2a} \\ &\Leftrightarrow 8a^2 + 1 - a + 4a\sqrt{2(1-a)} \geq 8a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-a}[(1-8a)\sqrt{1-a} + 4\sqrt{2a}] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-a} + 4\sqrt{2a} \geq 8a\sqrt{1-a} \quad (1) \end{aligned}$$

Nếu $a=0$ hoặc $a=1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $0 < a < 1$ thì (1) tương đương với: $\frac{1}{8a} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-a}} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8a} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-a}} &= \frac{1}{8a} + \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{(1-a)a}} \geq \frac{1}{8a} + \frac{2\sqrt{2a}}{(1-a+a)} \\ &= \frac{1}{8a} + 2\sqrt{2a} = \frac{1}{8a} + \sqrt{2a} + \sqrt{2a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8a} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > 1\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b, c=0$ hoặc hoán vị.

Bây giờ ta sẽ thử dồn biến ra biên.

Giải:

Đặt $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$. Ta sẽ CMR $f(a, b, c) \geq f\left(a + \frac{c}{2}, b + \frac{c}{2}, 0\right)$ (*)

(Đánh giá như thế để đảm bảo tổng $a+b+c$ không đổi)

Thật vậy (*) tương đương:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{2a+c}{2b+c}} + \sqrt{\frac{2b+c}{2a+c}}$$

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=2$. Bất đẳng thức cần cm trở thành:

$$\sqrt{\frac{a}{2-a}} + \sqrt{\frac{b}{2-b}} + \sqrt{\frac{2-a-b}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{2+a-b}{2+b-a}} + \sqrt{\frac{2+b-a}{2+a-b}} \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) là một bất đẳng thức mà theo quan điểm của người viết là khá khó, lời giải tìm được cho bài toán này là một lời giải rất dài dòng, và điều đó cho ta thấy phương pháp dồn biến tuy rất mạnh nhưng đôi lúc sẽ dẫn chúng ta đến những khó khăn còn to lớn hơn ban đầu. Hy vọng rằng trong thời gian tới các bạn sẽ tìm ra một lời giải thật ngắn gọn và sáng sủa cho bài toán này.

Qua ví dụ trên phần nào các bạn đã hiểu được tư tưởng của phương pháp này. Nhưng VD1 lại không cho ta thấy hết được sức mạnh của phương pháp dồn biến bởi lẽ việc chứng minh dẫn đến các bất đẳng thức khác thậm chí khó hơn rất nhiều so với việc sử dụng các bất đẳng thức cổ điển. Tuy nhiên, với các ví dụ tiếp theo sau đây, sức mạnh của phương pháp sẽ dần được thể hiện bởi lẽ đó có thể coi là con đường khả dĩ và hiệu quả nhất :

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 0$.

$$\text{CMR: } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 6abc \geq -3$$

Khi đọc bài toán trên có thể nhiều bạn sẽ cảm thấy rất lúng túng, bởi vì điều kiện a, b, c là các số thực khiến việc sử dụng các bất đẳng thức quen biết như AM-GM, Cauchy-Schwarz hay Holder ... gặp trở ngại. Hơn nữa hai vế của bất đẳng thức lại không đồng bậc (có thể giải quyết vấn đề bằng cách đồng bậc hóa 2 vế nhưng sẽ dẫn đến 1 bất đẳng thức khác rất phức tạp) nên việc sử dụng các phương pháp thông thường để giải quyết bài toán này sẽ vướng phải những khó khăn nhất định. Và vì thế ý tưởng dồn biến đến với chúng ta theo 1 lẽ rất tự nhiên ...

Tuy nhiên do ta chưa biết tính âm dương của các biến nên không thể vội vàng mà dồn biến ngay được, nhưng rất may là với bài toán này thì ta có thể xét các trường hợp riêng một cách tương đối đơn giản. Xin được trích nguyên văn lời giải của bạn Đoàn Quốc Đạt (Chuyên toán 12-15) như sau:

Giải: Do $a + b + c = 0$ nên ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

- TH1: Tồn tại 1 trong 3 số a, b, c bằng 0. Khi đó ta có $VP \geq 0 > VT = -3$.
- TH2: Tích $abc > 0$ (tức có 2 số cùng âm, số kia dương hoặc cả 3 số cùng dương) thì ta có $VP \geq 0 > VT = -3$.
- TH3: Có 1 số âm và 2 số còn lại cùng dương (nếu cả 3 cùng âm thì trái với giả thiết $a + b + c = 0$). Không mất tính tổng quát giả sử $c < 0$, khi đó ta đặt $c' = |c|$.

Xét hàm số $f(a, b, c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 6abc + 3 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 6abc' + 3$.

Xét

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &= c^2 \left[a^2 + b^2 - \frac{(a+b)^2}{2} \right] + a^2b^2 - \frac{(a+b)^4}{16} + 6c' \left[\frac{(a+b)^2}{4} - ab \right] \\ &= \frac{(a-b)^2}{2} \left\{ c'^2 + 3c' - \frac{1}{2} \left[ab + \frac{(a+b)^2}{4} \right] \right\} \end{aligned}$$

Mặt khác do $a + b + c = 0$ nên suy ra $c' = a + b$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ab + \frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{c'^2}{2} \\ \Rightarrow f(a,b,c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &\geq \frac{(a-b)^2}{2} \left(c'^2 + 3c' - \frac{c'^2}{4}\right) = \frac{(a-b)^2}{2} \left(\frac{3}{4}c'^2 + 3c'\right) \geq 0 \\ \Rightarrow f(a,b,c) &\geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \end{aligned}$$

Vì thế ta chỉ cần cm bài toán trong trường hợp $a=b$.

Tức là ta chỉ cần chứng minh $9a^4 - 12a^3 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(9a^2 + 6a + 3) \geq 0$ (đúng).

Vậy bất đẳng thức được cm hoàn tất. Dấu đẳng thức chỉ khi $a=b=1, c=-2$ hoặc các hoán vị tương ứng của bộ số này.

Ví dụ trên là một bài toán tương đối đặc trưng cho phương pháp dồn biến, tuy nhiên ta vẫn chưa cần sử dụng đến tính thứ tự của các biến số. Đối với các bài toán đơn giản thì việc làm đó là không cần thiết, nhưng với 1 số bài toán thuộc loại "khó nhằn" hơn thì việc sắp xếp thứ tự các tất cả các biến hay 1 vài biến nào đó (biến nhỏ nhất, biến lớn nhất, biến nằm giữa 2 biến, ...) rồi mới dồn biến thì lại cho ta hiệu quả vô cùng to lớn.

Để thấy sự đúng đắn của nhận định trên ta cùng đi đến các ví dụ sau đây:

Ví dụ 3: Cho a, b, c, d là các số thực không âm và không có 2 số nào đồng thời bằng 0.

Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3+c^3} + \frac{1}{a^3+d^3} + \frac{1}{c^3+b^3} + \frac{1}{d^3+b^3} + \frac{1}{c^3+d^3} \geq \frac{243}{2(a+b+c+d)^3}$$

Giải: Vì bất đẳng thức đã cho là thuần nhất nên không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c+d=1$.

Cũng như ví dụ 1, điều kiện bài toán gợi cho chúng ta điểm rơi của dấu đẳng thức, đó là có 1 biến bằng 0 và 3 biến còn lại bằng nhau, điều đó làm cho chúng ta suy nghĩ đến việc dồn biến ra biên.

Đặt $f(a,b,c,d) = \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3+c^3} + \frac{1}{a^3+d^3} + \frac{1}{c^3+b^3} + \frac{1}{d^3+b^3} + \frac{1}{c^3+d^3}$

Ta hi vọng sẽ có đánh giá sau: $f(a,b,c,d) \geq f\left(a+\frac{d}{3}, b+\frac{d}{3}, c+\frac{d}{3}, 0\right)$. (*)

Nhưng rất tiếc là ta chưa thể có đánh giá đó ngay được, thật vậy chỉ cần lấy 1 phản VD là $a=0,01; b=c=d=0,33$ thì bất đẳng thức (*) sẽ đảo chiều. Vậy là ta không thể giải quyết bài toán theo tư tưởng dồn biến !?!

Hãy khoan bỏ cuộc tại đây, ta chưa thể có (*) vì chưa tận dụng sự đối xứng của $f(a,b,c,d)$, chính nhờ sự đối xứng này mà ta có thể sắp xếp được thứ tự của các biến mà cụ thể trong bài toán này ta có thể giả sử $d = \min\{a,b,c,d\}$.

Khi đó ta có những đánh giá sau:

$$a^3 + b^3 \leq \left(a + \frac{d}{3}\right)^3 + \left(b + \frac{d}{3}\right)^3 \quad (1) \quad a^3 + d^3 \leq \left(a + \frac{d}{3}\right)^3 \quad (4)$$

$$a^3 + c^3 \leq \left(a + \frac{d}{3}\right)^3 + \left(b + \frac{d}{3}\right)^3 \quad (2) \quad b^3 + d^3 \leq \left(b + \frac{d}{3}\right)^3 \quad (5)$$

$$c^3 + b^3 \leq \left(a + \frac{d}{3}\right)^3 + \left(b + \frac{d}{3}\right)^3 \quad (3) \quad c^3 + d^3 \leq \left(c + \frac{d}{3}\right)^3 \quad (6)$$

Bất đẳng thức (1) là hiển nhiên do $a + \frac{d}{3} \geq a; b + \frac{d}{3} \geq b$, các bất đẳng thức

(2)(3) được suy ra một cách tương tự.

Bất đẳng thức (4) tương đương với:

$$a^3 + ad\left(a + \frac{d}{3}\right) + \frac{d^3}{27} \geq a^3 + d^3 \Leftrightarrow ad\left(a + \frac{d}{3}\right) \geq \frac{26}{27}d^3 \text{ điều này đúng do}$$

$$d = \min\{a,b,c,d\}.$$

Vậy bất đẳng thức (4) được chứng minh, các bất đẳng thức (5)(6) được suy ra một cách tương tự.

Áp dụng các bất đẳng thức (1)(2)(3)(4)(5)(6) ta có :

$$\sum_{sym}^{a,b,c,d} \frac{1}{a^3 + b^3} \geq \sum_{cyc}^{a,b,c} \frac{1}{\left(a + \frac{d}{3}\right)^3 + \left(b + \frac{d}{3}\right)^3} + \sum_{cyc}^{a,b,c} \frac{1}{\left(a + \frac{d}{3}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow f(a,b,c,d) \geq f\left(a + \frac{d}{3}, b + \frac{d}{3}, c + \frac{d}{3}, 0\right)$$

Vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức (*)

Để kết thúc bài toán ta sẽ CMR với $a, b, c \geq 0$ thỏa $a + b + c = 1$ thì

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{1}{a^3 + b^3} + \sum_{cyc} \frac{1}{a^3} &\geq \frac{243}{2} \\ \Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{(a^3 + b^3)c^3} \right) &\geq 243 \\ \Leftrightarrow 2(a + b + c)^3 (a^3 + b^3 + c^3) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{(a^3 + b^3)c^3} \right) &\geq 243 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder cho các bộ số

$$(a, b, c); (c^3 + b^3, a^3 + c^3, a^3 + b^3); \left(\frac{1}{(c^3 + b^3)a^3}, \frac{1}{(c^3 + a^3)b^3}, \frac{1}{(a^3 + b^3)c^3} \right) \text{ ta có đpcm.}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức chỉ khi $a = b = c, d = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng của bộ số này.

Ví dụ 4([1]): Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \leq 27$

Giải:

Đặt $f(a, b, c) = (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$, ta sẽ CM $f(a, b, c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

Điều trên tương đương với

$$\begin{aligned} \left[\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{a+b}{2} + 1 \right]^2 &\geq (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1) \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2ab + 4)^2 &\geq 16(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1) \\ \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 4(a^3b + b^3a + a^3 + b^3) + 8ab &\geq 10a^2b^2 + 4(a^2b + b^2a + a^2 + b^2) \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[(a+b)^2 + 4(a+b) + 4ab - 4 \right] &\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên sẽ đúng nếu $(a+b)^2 + 4(a+b) + 4ab - 4 \geq 0$, muốn có điều đó ta sẽ giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$ (điều này có thể thực hiện được do sự đối xứng của $f(a, b, c)$)

Khi đó thì $c \leq 1 \Rightarrow a+b \geq 2 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4 \Rightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) + 4ab - 4 \geq 0$ (đpcm)

Giờ ta chỉ cần CM bất đẳng thức trong trường hợp $a=b$ tức là chứng minh:

$$(c^2 + c + 1)(a^2 + a + 1)^2 \leq 27 \text{ với } a, c \geq 0 \text{ và } 2a + c = 3$$

Thế $c = 3 - 2a$ ta sẽ CM bất đẳng thức sau với $a \in [0; 1,5]$:

$$\begin{aligned} & \left[(3-2a)^2 + 4 - 2a \right] (a^2 + a + 1)^2 \leq 27 \\ & \Leftrightarrow 4a^6 - 6a^5 - 3a^4 - 8a^3 + 15a^2 + 12a - 14 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow (a-1)^2 (4a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 16a - 14) \leq 0 \end{aligned}$$

Đặt $f(a) = 4a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 16a - 14$ với $a \in [0; 1,5]$.

Ta có $f'(a) = 16a^3 + 6a^2 - 6a - 16 = 2(a-1)(8a^2 + 11a + 8)$

Lập bảng biến thiên ta thấy ngay $f(a) < 0$ với mọi $a \in [0; 1,5]$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Ví dụ 5([1]): Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải 1: Nhận thấy rằng dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ nên ta sẽ thử dồn biến về tâm.

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - a^2 - b^2 - c^2$$

Ta mong muốn có đánh giá $f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

Điều trên tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - a^2 - b^2 - c^2 \geq \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{(a+b)^2}{2} - c^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)^2}{2} - a^2 - b^2 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a^2+b^2)(a+b)^2 - 8a^2b^2}{a^2b^2(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a^2+b^2)(a+b)^2 - 8a^2b^2}{a^2b^2(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2 \left[\frac{(a+b)^2 + 2ab}{a^2b^2(a+b)^2} - \frac{1}{2} \right]}{a^2b^2(a+b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a-b)^2 \left[\frac{(a+b)^2 + 2ab}{a^2b^2(a+b)^2} - \frac{1}{2} \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{(a+b)^2 + 2ab}{a^2b^2(a+b)^2} = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{ab(a+b)^2} \geq \frac{1}{\left(\frac{(a+b)^2}{4} \right)^2} + \frac{2}{2ab(a^2+b^2)} \geq \frac{24}{(a+b)^4}$$

Để thực hiện được phép dồn biến, tức là đánh giá các biến để có thể có $\frac{24}{(a+b)^4} \geq \frac{1}{2}$.

Điều này tương đương với $a+b \leq \sqrt[4]{48} \approx 2,632...$. Nếu chỉ dùng đánh giá $a+b < 3$ thì không thể có điều cần chứng minh. Chính vì vậy nên chúng ta mới tìm cách để giới hạn $a+b$ nhỏ hơn $2,632...$. Ta chỉ cần giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ (điều này luôn thực hiện được do tính đối xứng của $f(a, b, c)$) thì ta sẽ có $c \geq 1$ suy ra $a+b \leq 2$ và ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$.

Với bài toán này ta còn có một cách giải khác chỉ sử dụng các bất đẳng thức quen biết như sau:

Lời giải 2: Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{cb} + \frac{1}{ac} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{3}{abc}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{3}{abc} \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 3 \geq abc(a^2 + b^2 + c^2)$

Ta cũng có

$$\begin{aligned}(ab + bc + ac)^2 &\geq 3abc(a + b + c) = 9abc \\ \Leftrightarrow \frac{(ab + bc + ac)^2}{9} &\geq abc\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần phải chứng minh:

$$3 \geq \frac{(ab + bc + ac)^2}{9} (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow 27 \geq (ab + bc + ac)^2 (a^2 + b^2 + c^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}(ab + bc + ac)^2 (a^2 + b^2 + c^2) &= (ab + bc + ac)(ab + bc + ac)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\leq \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)}{3} \right]^3 = \left[\frac{(a + b + c)^2}{3} \right]^3 = 27\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 6(Russia 2002): Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$

Lời giải 1: Tương tự như các ví dụ đã xét ở trên, điểm rơi của dấu đẳng thức đưa chúng ta đến suy nghĩ dồn biến về tâm. Đặt $f(a, b, c) = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - ab - bc - ca$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \Leftrightarrow f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - ab - bc - ca - 2\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{c} + \frac{(a+b)^2}{4} + (a+b)c \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} - 2\sqrt{\frac{a+b}{2}} + \frac{(a+b)^2}{4} - ab \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{b} - \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a-b}{2\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)} + \frac{b-a}{2\left(\sqrt{b} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)} + \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4} - \frac{1}{2\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)} \right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right) - 2}{4\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Ta mong muốn có đánh giá $(\sqrt{a} + \sqrt{b})\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right) - 2 \geq 0$ (*)

Điều này sẽ được thỏa mãn khi ta tận dụng tính đối xứng của $f(a, b, c)$ để giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó ta sẽ có $a \geq 1$ và $a+b \geq 2$. Lúc đó thì bất đẳng thức (*) hiển nhiên thỏa mãn.

Giờ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $a=b$ tức là chứng minh với $2a+c=3$ thì $2\sqrt{a} + \sqrt{c} \geq a^2 + 2ac$. Thế $c=3-2a$ và ta cần chứng minh bất đẳng thức sau với $a \in [1; 1,5]$ (do giả sử $a \geq b \geq c$) thì:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{a} + \sqrt{3-2a} \geq a^2 + 2a(3-2a) \\
&\Leftrightarrow 3a^2 + 2\sqrt{a} + \sqrt{3-2a} \geq 6a
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên nhìn tuy có vẻ rất đơn giản nhưng để chứng minh được nó là điều không đơn giản chút nào. Bởi lẽ hàm $f(a) = 3a^2 + 2\sqrt{a} + \sqrt{3-2a} - 6a$ với $a \in [1; 1,5]$ không phải là hàm đơn điệu và điểm cực trị của nó đạt tại một giá trị rất "lẻ" là $a \approx 1,46132$ (việc tìm ra giá trị này cũng khá phức tạp và người viết xin không

nêu ra ở đây). Và vì thế việc giải quyết bài toán theo tư tưởng dồn biến vẫn đang là một vấn đề còn bỏ ngỏ chờ các bạn hoàn thiện trong thời gian tới.

Ta có thể thấy rằng việc sắp xếp thứ tự của các biến trong lời giải đến một cách hoàn toàn tự nhiên. Chúng ta không nhất thiết phải sắp xếp chúng ngay từ đầu mà ngay trong quá trình đánh giá của chúng ta sẽ xuất hiện điều cần phải giả sử (tất nhiên là không làm mất tính tổng quát của bài toán).

Với bài toán trên ta còn có một lời giải dùng hoàn toàn bất đẳng thức cổ điển như sau:

Lời giải 2: Ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} &\geq ab + bc + ca \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) &\geq 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + a^2 + b^2 + c^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + a^2 + b^2 + c^2 &\geq (a + b + c)^2 = 9\end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta cũng có:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 &\geq 3a \\ \sqrt{b} + \sqrt{b} + b^2 &\geq 3b \\ \sqrt{c} + \sqrt{c} + c^2 &\geq 3c\end{aligned}$$

Cộng theo về 3 bất đẳng thức trên ta có $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 9$ (đpcm)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức chỉ khi $a = b = c = 1$.

Lời giải thứ 2 của ví dụ 5 và ví dụ 6 là những lời giải rất ngắn gọn và đa số các bạn sẽ đồng ý rằng nó đẹp hơn nhiều so với lời giải sử dụng dồn biến. Nhưng để có được những lời giải như thế cần phải có một sự tinh tế nhất định và không phải dễ dàng để nghĩ ra. Trong khi đó lời giải bằng dồn biến tuy sử dụng những biến đổi khá rườm rà nhưng lại rất tự nhiên và đường lối đã là hết sức rõ ràng. Phương pháp này đòi hỏi người làm phải có một niềm tin vững chắc về đường lối và lòng kiên trì nhất định. Đó là điều vô cùng quan trọng khi làm bất đẳng thức nói riêng và giải toán nói chung. Ất hẳn sẽ có rất nhiều bạn nản lòng khi đứng trước những biến

đôi dài dòng như vậy, đó thực sự là một điều vô cùng đáng tiếc. Người viết chỉ muốn nhắn nhủ với các bạn rằng, những khó khăn khi tính toán đó chỉ là những trở ngại nhỏ trên con đường giải quyết một bài toán khó và là điều không thể tránh khỏi, và trong những bài tập được đề cập ở phần cuối, ta sẽ còn phải đụng phải những tính toán còn "ghê gớm" hơn nhiều.

Ví dụ 7(IRAN 1996): Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

Bài toán trên đã trở nên quá nổi tiếng bởi độ khó của nó. Dấu đẳng thức xảy ra ở 2 trường hợp là $a=b=c$ hoặc $a=b, c \rightarrow 0$ cùng các hoán vị. Với bài toán này, nếu ta thực hiện việc dồn biến theo trung bình cộng hoặc trung bình nhân đều sẽ dẫn đến những bất đẳng thức vô cùng phức tạp. Đừng lo lắng bởi có vô vàn những cách dồn biến khác nhau và mỗi chúng lại chứa đựng trong mình những nét tinh túy riêng, và tùy từng bài toán mà ta sẽ có cách áp dụng vô cùng linh hoạt và uyển chuyển. Lời giải sau đây được trình bày theo ý của thầy Trần Nam Dũng:

Giải: Không mất tính tổng quát ta có thể chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$ và ta phải chứng

minh rằng $f(a,b,c) = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4}$

Như đã nói ở trên, dấu đẳng thức xảy ra khi có 2 biến bằng nhau và vì thế ta sẽ thử dồn biến về tâm. Nhưng ta chưa biết là sẽ "ép" 2 biến như thế nào để tận dụng tối đa giả thiết $ab+bc+ca=1$. Không sao cả, ta sẽ tìm cách chứng minh rằng $f(a,b,c) \geq f(t,t,c)$ với t thỏa mãn $2t^2+tc=1$ và nếu được thì sau đó ta chỉ cần phải chứng minh bất đẳng thức khi $a=b=t$ là xong. Thật vậy, xét:

$$\begin{aligned} d &= f(a,b,c) - f(t,t,c) = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} - \frac{1}{4t^2} - \frac{2}{(t+c)^2} \\ &= \frac{4t^2 - (a+b)^2}{4t^2(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} - \frac{2}{(t+c)^2} \\ &= \frac{(2t-a-b)(2t+a+b)}{t^2(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} - \frac{2}{(t+c)^2} \end{aligned}$$

Chú ý từ giả thiết $t^2 + 2tc = ab + bc + ca = 1$ ta suy ra:

$$\begin{aligned}(t+c)^2 &= (a+c)(b+c) \\ \Rightarrow a+b-2t &= (a+c) + (b+c) - 2(c+t) = (a+c) + (b+c) - 2\sqrt{(a+c)(b+c)} \\ &= \left(\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{\left(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)^2}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}d &= \frac{-(a-b)^2(2t+a+b)}{\left(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)^2 (a+b)^2 4t^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} - \frac{2}{(a+c)(b+c)} \\ &= \frac{-(a-b)^2(2t+a+b)}{\left(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)^2 (a+b)^2 4t^2} + \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \\ &= (a-b)^2 \left[\frac{1}{(a+c)(b+c)} - \frac{2t+a+b}{\left(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)^2 (a+b)^2 4t^2} \right]\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ khi đó ta có $c \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \leq t$.

Ta có

$$2t+a+b \leq a+c+b+c+2(t+c) = a+c+b+c+2\sqrt{(a+c)(b+c)} = \left(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)^2$$

$$\text{và } (a+c)(b+c) = \sqrt{(a+c)(b+c)}(t+c) \leq 2t\sqrt{(a+b)(a+b)} = 2t(a+b)$$

Suy ra

$$\frac{1}{(a+c)(b+c)} - \frac{2t+a+b}{\left(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}\right)^2 (a+b)^2 4t^2} \geq \frac{1}{2t(a+b)} - \frac{1}{4t^2(a+b)^2} = \frac{1}{2t(a+b)} \left[1 - \frac{1}{2t(a+b)} \right]$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}c = \min\{a, b, c\} \wedge a, b, c \in [0, 1] &\Rightarrow 2t(a+b) = t(a+b) + t(a+b) \\ &\geq c(a+b) + t(a^2 + b^2) \geq c(a+b) + 2tab \geq c(a+b) + \frac{2\sqrt{3}}{3}ab > c(a+b) + ab = 1\end{aligned}$$

Vậy ta có $d \geq 0 \Rightarrow f(a, b, c) \geq f(t, t, c)$. Ta sẽ chứng minh $f(t, t, c) \geq 0$

Thế $c = \frac{1-t^2}{2t}$ vào $f(t,t,c)$ và giờ ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4t^2} + \frac{2}{\left(t + \frac{1-t^2}{2t}\right)^2} - \frac{9}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4t^2} + \frac{8t^2}{(t^2+1)^2} - \frac{9}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(t^2+1)^2 + 32t^4 - 9t^2(t^2+1)^2}{4t^2(t^2+1)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(1-t^2)(1-3t^2)^2}{4t^2(t^2+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do $t \in [0,1]$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c \rightarrow 0$ cùng các hoán vị.

Ví dụ 8([2]): Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

$$\text{CMR } a+b+c \geq ab+bc+ca$$

Dấu đẳng thức của bất đẳng thức này là tại $a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ cùng các hoán vị. Điều kiện của bài toán này khá là đặc biệt và ta khó có thể nghĩ ra một đại lượng trung bình thích hợp để tận dụng tối đa giả thuyết này. Thế nên cũng như trong VD7, ta không cần quan tâm "hình thù" của đại lượng đó như thế nào mà chỉ cần biết rằng ta sẽ "ép" cho 2 biến về giá trị t nào đó thỏa mãn $t^2+2tc+t^2c=4$. Dựa trên ý tưởng đó ta đi đến giải quyết bài toán như sau:

Lời giải 1: Đặt $f(a,b,c)=a+b+c-ab-bc-ca$. Với t thỏa mãn $t^2+2tc+t^2c=4$ ta có $f(t,t,c)=2t+c-t^2-2tc$.

$$\text{Xét } d = f(a,b,c) - f(t,t,c) = 2a+b+c-ab-bc-ca-2t-c+t^2+2tc$$

$$= a+b-2t-(ab-t^2)-c(a+b-2t)$$

$$\text{Theo bài ra ta có } t^2+2tc+t^2c=ab+bc+ca=4 \Rightarrow ab-t^2=c(2t-a-b+t^2-ab)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (c+1)(ab-t^2) = c(2t-a-b) \\ &\Rightarrow ab-t^2 = \frac{c(2t-a-b)}{c+1} \quad (1) \end{aligned}$$

Suy ra $d = (a+b-2t)\left(1 + \frac{1}{c+1} - c\right)$. Bây giờ không mất tính tổng quát ta giả sử

$$c = \min\{a, b, c\}. \text{ Khi đó thì } 0 \leq c \leq 1 \Rightarrow 1 - c \geq 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{c+1} - c > 0.$$

Giờ ta cần chứng minh rằng $a+b-2t \geq 0$, vì chưa rõ "hình thù" của t nên ta khó mà có điều này trực tiếp, vì thế nên ta sẽ thử phản chứng xem sao. Giả sử $a+b-2t < 0$, từ (1) ta có $ab-t^2 > 0 \Rightarrow ab > t^2 \Rightarrow \sqrt{ab} > t$ (*). Mặt khác $a+b-2t < 0 \Rightarrow t > \frac{a+b}{2}$ (**). Từ (*) và (**) ta có: $\sqrt{ab} > t > \frac{a+b}{2} \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$ (vô lý). Vậy ta có $a+b-2t \geq 0$ suy ra $d \geq 0$.

Giờ ta cần chứng minh $f(t, t, c) \geq 0 \Leftrightarrow 2t + c - t^2 - 2tc \geq 0$ (2)

Ta có $t^2 + 2tc + t^2c = 4 \Rightarrow c = \frac{4-t^2}{t^2+2t}$ và do giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ nên ta có $t \in [1, 2]$.

Thế $c = \frac{4-t^2}{t^2+2t}$ vào (2) và ta cần chứng minh với $t \in [1, 2]$ thì:

$$\begin{aligned} &2t + \frac{4-t^2}{t^2+2t} - t^2 - \frac{2t(4-t^2)}{t^2+2t} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2t^3 + 4t^2 + 4 - t^2 - t^4 - 2t^3 - 8t + 2t^3}{t^2+2t} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 8t + 4}{t^2+2t} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(t+2)(2-t)}{t^2+2t} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do $t \in [1, 2]$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Thông thường thì ở bước đánh giá $f(a, b, c) \geq f(t, t, c)$ ta chỉ cần sử dụng đến tính thứ tự của các biến số nhưng trong bài toán trên bước này không còn đơn giản

như thế nữa mà buộc ta phải khéo léo hơn trong việc chứng minh mà cụ thể là sử dụng phương pháp phản chứng như trong lời giải đã trình bày. Bài toán trên còn một lời giải nữa rất đẹp mắt và tinh tế như sau:

Lời giải 2: Từ giả thiết bài toán $ab+bc+ca+abc=4$ ta suy ra rằng tồn tại các số không âm x, y, z sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{x+z}, c = \frac{2z}{x+y}$ (các bạn hãy suy nghĩ xem tại sao lại có thể khẳng định như vậy!?).

Khi đó thì bất đẳng thức cần chứng minh viết lại là:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{2xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{2yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{2zx}{(z+y)(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Ta tiếp tục đi đến một ví dụ khác tương tự như sau:

Ví dụ 9([2]): Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3k \geq (k+1)(ab+bc+ca)$$

Để ý rằng điều kiện của bài toán này giống hệt với điều kiện trong ví dụ 8, và ta sẽ nghĩ ngay rằng với k tốt nhất để bất đẳng thức đúng thì dấu đẳng thức cũng sẽ xảy ra tại các giá trị như ví dụ 8.

Ta sẽ thử các giá trị của (a, b, c) bởi các bộ số $(2, 2, 0)$ và $(1, 1, 1)$ và tìm ra chặn trên lớn nhất của k và hi vọng rằng bất đẳng thức sẽ đúng với giá trị đó. Để có niềm tin về việc chứng minh bất đẳng thức đúng trong trường hợp k lớn nhất tìm ra

thì các bạn cần có một sự "nhạy cảm" nhất định và điều đó chỉ có thể có được thông qua quá trình học tập và rèn luyện hết sức nghiêm túc.

Giải: Cho $(a, b, c) = (2, 2, 0)$ ta có: $8 + 3k \geq 4(k+1) \Leftrightarrow k \leq 4$. Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $k=4$ tức là cần chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 5(ab + bc + ca)$.

Tương tự như bài toán trên, đặt $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 5(ab + bc + ca)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $f(a, b, c) \geq f(t, t, c)$ với t thỏa mãn $t^2 + 2tc + t^2c = 4$.

Xét $d = f(a, b, c) - f(t, t, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 5(ab + bc + ca) - 2t^2 - c^2 - 12 + 5(t^2 + 2tc)$

$$= a^2 + b^2 - 2t^2 + 5[t^2 - ab + c(2t - a - b)]$$

Từ điều kiện bài toán ta có: $ab - t^2 = \frac{c}{c+1}(2t - a - b)$ suy ra:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2t^2 &= (a+b)^2 - 4t^2 + 2(t^2 - ab) \\ &= (a+b-2t)(a+b+2t) + \frac{2c}{c+1}(a+b-2t) \\ &= (a+b-2t)\left(a+b+2t + \frac{2c}{c+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d &= (a+b-2t)\left(a+b+2t + \frac{2c}{c+1}\right) + 5\left(\frac{c}{c+1}(a+b-2t) + c(2t-a-b)\right) \\ &= (a+b-2t)\left(a+b+2t + \frac{7c}{c+1} - 5c\right) \end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$ khi đó thì $c \in [0; 1]$ và $a, b, t \geq c$.

Suy ra $a+b+2t \geq 4c$ và $\frac{7c}{c+1} \geq c$ (điều này tương đương $c(c-6) \leq 0$ (đúng))

$$\Rightarrow a+b+2t + \frac{7c}{c+1} - 5c \geq 0. (1)$$

Theo ví dụ 8 ta cũng chứng minh được $a+b-2t \geq 0$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $d \geq 0$ và giờ ta chỉ cần chứng minh rằng :

$$f(t,t,c) \geq 0 \Leftrightarrow 2t^2 + c^2 + 12 - 5(t^2 + 2tc) \geq 0 (*)$$

Thế $c = \frac{4-t^2}{t^2+2t}$ vào (*) và ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & 2t^2 + \left(\frac{4-t^2}{t^2+2t} \right)^2 + 12 - 5 \left(t^2 + \frac{2t(4-t^2)}{t^2+2t} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(t-1)^2(2-t)(3t+2)}{t^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $0 \leq t \leq 2$. Vậy ta có điều phải chứng minh. Hằng số k lớn nhất là 4 và dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ cùng các hoán vị.

Ví dụ 10: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq \frac{27}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Các bài toán trong những ví dụ chúng ta xét đến đều là các bất đẳng thức đối xứng với các biến và vì thế nên việc chứng minh bất đẳng thức điều kiện không phải là vấn đề quá khó khăn. Tuy nhiên không phải bao giờ cũng thế (nhất là với các bất đẳng thức hoán vị), như trong ví dụ này, việc chứng minh bất đẳng thức điều kiện sẽ là một công việc hết sức phức tạp khi các bạn thực hiện phép dồn biến về thông thường. Trong những trường hợp như thế này thì phương pháp dồn biến toàn miền sẽ là một sự lựa chọn hữu dụng. Ý tưởng chính của phương pháp này là sẽ đồng thời gia giảm các biến số đi một lượng nào đó và triệt tiêu một biến số về 0, khi đó số biến sẽ giảm đi và việc chứng minh còn lại đơn giản hơn rất nhiều so với bài toán ban đầu, để hiểu rõ hơn vấn đề này ta sẽ cùng đi tìm lời giải cho ví dụ trên.

Lời giải 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \right] \geq \frac{27}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

Ta nhận thấy rằng nếu ta giảm cả 3 biến đi một lượng $0 \leq x \leq c$ thì ta có

$$\frac{27}{4}[(a-x)-(b-x)]^2[(b-x)-(c-x)]^2[(c-x)-(a-x)]^2 = \frac{27}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Tức là vế phải của bất đẳng thức không đổi, trong khi đó thì:

$$\begin{aligned} & \left[(a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2 \right] \left\{ \left[(a-x)^2 - (b-x)^2 \right]^2 + \left[(b-x)^2 - (c-x)^2 \right]^2 + \left[(c-x)^2 - (a-x)^2 \right]^2 \right\} \\ &= \left[(a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2 \right] \left[(a-b)^2(a+b-2x)^2 + (b-c)^2(b+c-2x)^2 + (c-a)^2(c+a-2x)^2 \right] \\ &\leq (a^2 + b^2 + c^2) \left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \right] \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa vế trái của bất đẳng thức sẽ giảm đi. Từ 2 điều trên ta đi đến việc chứng minh bất đẳng thức với $c=0$ (tức ta đã giảm cả 3 biến đi một lượng $x=c$).

Với $c=0$, bất đẳng thức cần chứng minh là:

$$a^6 + b^6 \geq \frac{27}{4}a^2b^2(a-b)^2 \text{ với } a, b \geq 0$$

Bất đẳng thức trên tương đương: $a^6 + b^6 + \frac{27}{2}a^3b^3 \geq \frac{27}{4}a^4b^2 + \frac{27}{4}a^2b^4$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^6 + \frac{27}{8}a^3b^3 + \frac{27}{8}a^3b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6 \left(\frac{27}{8}a^3b^3 \right)^2} = \frac{27}{4}a^4b^2 \quad (1)$$

$$b^6 + \frac{27}{8}a^3b^3 + \frac{27}{8}a^3b^3 \geq 3\sqrt[3]{b^6 \left(\frac{27}{8}a^3b^3 \right)^2} = \frac{27}{4}b^4a^2 \quad (2)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$.

Như đã thấy ở ví dụ trên, khi ta gia giảm toàn bộ các biến cùng một lượng thì VT giảm dần còn VP không đổi, trong nhiều trường hợp khác, khi thực hiện phương pháp dồn biến toàn miền thì thậm chí ta còn có những nhận xét khó hơn là cả 2 vế cùng thay đổi, các bạn sẽ gặp phải các trường hợp đó trong phần bài tập cuối bài viết.

Có thể thấy rằng việc sử dụng phương pháp dồn biến toàn miền đã giải quyết bài toán một cách rất đơn giản và đẹp mắt. Đặc điểm nhận dạng những bài toán sử dụng phương pháp này là khi có sự chênh lệch giữa các đại lượng xấp xỉ bằng 0,

một cách trực quan thì với các bài toán ba biến các bạn có thể hiểu là sự xuất hiện của đại lượng đặc biệt $(a-b)(b-c)(c-a)$, chính điều này là chìa khóa để chúng ta giải quyết được bài toán bằng phương pháp dồn biến toàn miền. Nếu không sử dụng phương pháp này mà "chăm chỉ" theo lối "cày bừa" thì khó khăn chúng ta gặp phải quả thật rất lớn, bởi bất đẳng thức tương đương khi khai triển 2 vế là:

$$4(a^6 + b^6 + c^6) + 54 \sum_{cyc} a^4 bc + 54 \sum_{cyc} a^3 b^3 + 150 a^2 b^2 c^2 \geq 27 \sum_{sym} a^4 b^2 + 54 \sum_{sym} a^3 b^2 c$$

nhìn rất "khủng khiếp" và thậm chí rất dễ gây nhầm lẫn.

Qua các ví dụ trên, ta thấy rằng "dường như" tất cả các bất đẳng thức đều xảy ra dấu đẳng thức khi một số biến bằng nhau. Quả thật thì chúng ta gặp điều đó quá nhiều và đôi khi khiến ta lầm tưởng rằng nó luôn phải như vậy. Nhưng trong thế giới muôn màu của bất đẳng thức còn biết bao nhiêu điều thú vị, ở đó có (và thậm chí là nhiều) những bất đẳng thức mà dấu đẳng thức xảy ra khi các biến ... đôi một khác nhau. Để rõ hơn về điều này chúng ta cùng đi đến ví dụ sau đây:

Ví dụ 11([4]): Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$$

Giải: (Lời giải sau đây lấy theo ý của tác giả Vasile Cirtoaje)

Đặt $f(a, b, c) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a = \min\{a, b, c\}$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq f(a,\sqrt{ac},c) \\
\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &\geq \frac{a}{a+\sqrt{ac}} + \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}+c} + \frac{c}{c+a} \\
\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} &\geq \frac{a}{a+\sqrt{ac}} + \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}+c} \\
\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} &\geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} \\
\Leftrightarrow (b-\sqrt{ac})^2 (\sqrt{c}-\sqrt{a}) &\geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $a = \min\{a,b,c\}$.

Giờ ta chỉ cần phải chứng minh

$$\begin{aligned}
f(a,\sqrt{ac},c) &\geq \frac{7}{5} \\
\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{c}{c+a} &\geq \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ thì } x \in [1,3] \text{ do } a,b,c \in \left[\frac{1}{3},3\right] \text{ và } a = \min\{a,b,c\}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2+1} &\geq \frac{7}{5} \\
\Leftrightarrow \frac{-2x^3+8x^2-7x+3}{5(x+1)(x^2+1)} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \frac{(3-x)(2x^2-2x+1)}{5(x+1)(x^2+1)} &\geq 0
\end{aligned}$$

$$(\text{Đúng do } x \in [1,3])$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$(a,b,c) = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right), \left(3, \frac{1}{3}, 1\right), \left(1, 3, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Trên đây là một bài toán khá đặc biệt khi dấu đẳng thức xảy ra rất lộn xộn, và càng bất ngờ hơn nữa khi ta có thể giải nó bằng phương pháp dồn biến. Nhưng hãy suy nghĩ cẩn trọng lại một chút, có thể bạn vừa nhận thấy một điều lạ lùng trong

phép chứng minh trên. Trong các ví dụ mà chúng ta vừa xét trước đó, ta cố gắng "ép" cho hai biến lại gần nhau hoặc "đẩy" một biến ra biên, quan trọng hơn là trong các đánh giá của chúng ta phải bảo toàn điều mỗi liên hệ giữa các biến số (tổng, tích, tổng bình phương, ...), nhưng trong bài toán bạn vừa đọc, ta lại dồn biến theo một cách khá "khó hiểu" khi cố "ép" b tiến đến \sqrt{ac} , điều này hoàn toàn không đảm bảo một mối liên hệ nào về tổng, tích hay tổng bình phương ... của a, b, c và phải chăng ta đã vi phạm quy tắc dồn biến ?!?

Hãy dừng lại một chút để suy ngẫm, việc dồn biến như vậy không có gì là khó hiểu cả. Thật vậy, sau khi đoán nhận được dấu đẳng thức của bài toán là $(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right)$, nếu tinh ý ta sẽ nhận thấy mối liên hệ giữa a, b, c đó là $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = 3$

và $b = \sqrt{ac}$. Bây giờ ta thực hiện phép đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ thì bất đẳng thức ban đầu sẽ đạt dấu đẳng thức tại $x = y = 3, z = \frac{1}{9}$. Đến đây chắc các bạn đã hiểu ra mấu

chốt của vấn đề, thực chất việc "ép" cho b tiến đến \sqrt{ac} chính là việc dồn biến về tâm ("ép" cho $x = y$) và điều này hoàn toàn đảm bảo các quy tắc của dồn biến. Ví dụ trên cho ta một cách suy nghĩ thoáng hơn về dồn biến, khi mà đa số các bạn khi sử dụng phương pháp này đều khá máy móc trong việc lựa chọn phương pháp để bảo toàn các điều kiện của biến số.

Để tránh tư tưởng dồn biến đối với bài toán này ta còn một cách giải khác như sau:

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$. Thế thì $xyz = 1$ và $x, y, z \in \left[\frac{1}{9}, 9\right]$.

Bất đẳng thức đã cho viết lại thành: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{7}{5}$

Bất đẳng thức trên là đối xứng với x, y, z nên ta có thể giả sử $x = \min\{x, y, z\}$, thế thì $x \in \left[\frac{1}{9}, 1\right]$.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau với $yz \geq 1$:

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{yz}} = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

(Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương $(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2(\sqrt{yz}-1) \geq 0$ (đúng))

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$ và ta quy bài toán về việc chứng minh $\frac{2}{a+1} + \frac{a^2}{a^2+1} \geq \frac{7}{5}$ như cách giải trên.

$$(Ta \text{ cũng có } a \in [1,3] \text{ do } x \in \left[\frac{1}{9}, 1\right])$$

Bài toán được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$(a,b,c) = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right), \left(3, \frac{1}{3}, 1\right), \left(1, 3, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Để kết thúc bài viết nhỏ này, xin được dẫn ra một ví dụ có thể nói là "kinh điển" của phương pháp dồn biến. Bài toán sau đây có thể đã là rất quen thuộc đối với nhiều người và cách giải chúng cũng đã xuất hiện ở rất nhiều tài liệu khác nhau. Người viết xin được trích dẫn chúng ra và mong rằng các bạn sẽ bình tĩnh để đọc - suy ngẫm - thấu hiểu hết nét tinh túy trong bài toán này:

Ví dụ 12([3]): Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2}$$

Đây thực sự là một bài toán rất khó đối với những ai chưa được tiếp xúc từ trước (và thậm chí nó vẫn rất khó với những người đã xem qua lời giải). Thật khó tưởng tượng khi biết rằng $\text{Max } P = \frac{11\sqrt{33}-45}{24}$ đạt được khi

$$a=b=\frac{\sqrt{33}-3}{2}, c=6-\sqrt{33} \text{ cùng các hoán vị. Điều này khá là đáng ngạc nhiên bởi}$$

lẽ thông thường các bất đẳng thức chúng ta gặp phải hoặc có dấu đẳng thức tại tâm

hoặc tại một số biến đạt giá trị ở biên. Nếu như chúng ta chỉ sử dụng các phương pháp dồn biến thông thường thì rất khó để có thể đánh giá được điểm rơi của dấu đẳng thức mà phải sử dụng phương pháp tinh tế hơn nhiều. Đây là lúc mà kỹ thuật dồn biến bằng hàm số phát huy được khả năng của nó. Trước tiên để các bạn có thể làm quen và nắm bắt với kỹ thuật này xin được nêu lên ý tưởng chính như sau: chẳng hạn khi muốn thực hiện phép dồn biến và dẫn đến việc cần chứng minh bất đẳng thức $f(a,b,c) \geq f(t,t,c)$ với t là một đại lượng trung bình thích hợp sinh ra từ mối liên hệ giữa các biến số, ta sẽ xét hàm số $g(s) = f(t+s, t-s, c)$ và chứng minh rằng $g(s)$ là hàm tăng và khi đó thì ta sẽ có $g(s) \geq g(0)$ và ta suy ra được rằng $f(a,b,c) \geq f(t,t,c)$ (điều phải chứng minh). Tuy rằng ý tưởng xem qua tưởng chừng như rất đơn giản nhưng để có thể nắm vững và vận dụng một cách thành thục kỹ thuật này thì đòi hỏi các bạn phải có một quá trình dài khổ luyện chứ không thể vận dụng được ngay trong một sớm một chiều.

Lời giải cho bài toán sau đây của anh Phan Thành Nam đặc trưng cho kỹ thuật dồn biến bằng hàm số với những kết quả tính toán hết sức điêu luyện và không kém phần "khùng khiếp":

Giải: Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a = s+t, b = s-t$ với $t \in [0, s-c]$ (Vì $a \geq b \geq c$)

Xét hàm số $f(t) = \frac{c(s-t)}{3+(s+t)^2} + \frac{c(s+t)}{3+(s-t)^2} + \frac{s^2-t^2}{3+c^2}$ với $t \in [0, s-c]$.

Ta có $f'(t) = \frac{-c}{3+(s+t)^2} - \frac{2c(s^2-t^2)}{[3+(s+t)^2]^2} + \frac{c}{3+(s-t)^2} + \frac{2c(s^2-t^2)}{[3+(s-t)^2]^2} + \frac{2t}{3+c^2}$

Đặt $u = 3+(s+t)^2$ và $v = 3+(s-t)^2$ ta có: $f'(t) = \frac{4cst}{uv} + \frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} - \frac{2t}{3+c^2}$

Ta cũng có $a+b=2s \Rightarrow s \in [1, 5]$ (do giả sử $a \geq b \geq c$)

$\Rightarrow cs = (3-2s)s \leq \frac{(3-2s+s)^2}{4} = \frac{(3-s)^2}{4} \leq \frac{(3-1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$.

Mặt khác ta có $u = 3 + (s+t)^2 \geq 3 + (1+0)^2 = 4$ và

$$v = 3 + (s-t)^2 \geq 3 + [s - (s-c)]^2 = 3 + c^2 \text{ (do } c \in [0, s-c])$$

Từ các điều trên ta suy ra: $\frac{4cst}{uv} \leq \frac{1}{3+c^2}$ (*)

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$u^2 v^2 = [3 + (s+t)^2]^2 [3 + (s-t)^2] \geq 4^4 (s^2 - t^2) \quad (1)$$

$$8cs(u+v)(3+c^2) = 4.4cs(3+s^2+t^2)(3+c^2) \leq 4 \left(\frac{4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2}{3} \right)^3$$

Mặt khác ta có:

$$4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2 \leq 4(3-2s)s + 6 + s^2 + (3s-3)^2 + (3-2s)^2 = 12 + 6(s-1)(s-2) \leq 12$$

$$\text{(Do } c = 3-2s \text{ và } t^2 \leq s-c = 3s-3)$$

Từ đó suy ra $8cs(u+v)(3+c^2) \leq 4 \left(\frac{12}{3} \right)^3 = 4^4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2 v^2} = \frac{8cs(u+v)(3+c^2)}{(3+c^2)} \frac{(s^2-t^2)}{u^2 v^2} \leq \frac{(s^2-t^2)}{4^4(s^2-t^2)} \frac{4^4}{(3+c^2)} = \frac{1}{3+c^2} (**)$$

Từ (*) và (**) ta có: $f'(t) \leq \frac{2}{3+c^2} - \frac{2t}{3+c^2} = \frac{2}{3+c^2} (1-t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, s-c]$

Vậy $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[0, s-c]$ suy ra $f(t) \leq f(0) \quad \forall t \in [0, s-c]$

Giờ ta chỉ cần tìm Max $g(s) = f(0) = \frac{2cs}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+c^2} = \frac{3s(3-2s)}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+(3-2s)^2}$ trên

$[0; 1,5]$. Ta có

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{(6-8s)(3+s^2) - 2s(6s-4s^2)}{(3+s^2)^2} + \frac{2s[3+(3-2s)^2] - s^2(8s-12)}{[3+(3-2s)^2]^2} \\ &= \frac{108(s^2-3s+4)(s-1)^2(-s^2-3s+6)}{(3+s^2)^2 [3+(3-2s)^2]^2} \end{aligned}$$

Ta thấy: $s^2 - 3s + 4 = (s - 1,5)^2 + 1,75 > 0 \quad \forall s \in [0; 1,5]$ và

$$-s^2 - 3s + 6 = \left(\frac{\sqrt{33} - 3}{2} - s \right) \left(\frac{\sqrt{33} + 3}{2} + s \right)$$

Lập bảng biến thiên ta thấy ngay $\text{Max } g(s) = \frac{11\sqrt{33} - 45}{24}$ khi $s = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$.

Vậy $\text{Max } P = \frac{11\sqrt{33} - 45}{24}$ xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}, c = 6 - \sqrt{33}$ cùng các hoán vị.

3. Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \leq \frac{1}{32}$$

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c)$$

Bài 3. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c + 3abc \geq 6$$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $(a - b)(c - d) \leq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 17(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)$$

Bài 5. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc \geq 6\sqrt{2}(a - b)(b - c)(c - a)$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$abc + \frac{12}{ab + bc + ca} \geq 5$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 48(ab + bc + ca) \geq 25$$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 9 \geq 10(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 10. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$$

Bài 12. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^3 + b^3 + c^3) + 18 \geq 9(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$$

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$ và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2}$$

Bài 15. Cho $a, b, c \geq 0$ và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3+a^2+b^2} + \frac{1}{3+b^2+c^2} + \frac{1}{3+c^2+a^2} \leq \frac{3}{5}$$

Bài 17. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3+b^3+c^3)+a^2+b^2+c^2+13abc \geq 1$$

Bài 18. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd+cda+dab \geq 8$$

Bài 19. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$3(a^3b+b^3c+c^3a)+16(ab+bc+ca) \leq 57$$

Bài 20. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abcd+1 \geq ab+bc+cd+da+ac+ad$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Sáng tạo bất đẳng thức - Phạm Kim Hùng.
- [2]. Những viên kim cương trong bất đẳng thức - Trần Phương.
- [3]. Phương pháp dồn biến - Phan Thành Việt.
- [4]. Algebraic Inequalities - Vasile Cirtoaje.
- [5]. Chuyên đề bất đẳng thức hiện đại - Võ Quốc Bá Cẩn.
- [6]. diendantoanhoc.net
- [7]. mathscope.org

SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Lê Cát Dương- Đặng Đức Hiếu

Bất đẳng thức (BĐT) là một trong những phần kiến thức đặc biệt quan trọng trong toán học nói chung và chương trình THPT nói riêng. Bất đẳng thức là một phần không thể thiếu trong các kì thi Toán, thi Đại Học, Cao Đẳng...

Việc luyện tập tốt về bất đẳng thức, giúp các bạn có tư duy tốt hơn trong việc học tập và cải thiện tốt tâm lý trong phòng thi (khi gặp một bài Bất đẳng thức khó)...

Để góp phần giúp cho các bạn nắm vững các kiến thức về bất đẳng thức, vận dụng một số kĩ năng, phương pháp để giải các bài toán liên quan đến bất đẳng thức, cũng như việc tìm đọc các tài liệu viết về bất đẳng thức được dễ dàng hơn, tôi đã tổng hợp và hệ thống ngắn gọn lại các bài tập tiêu biểu của phương pháp gọi là:
Sử dụng tiếp tuyến để tìm lời giải cho chứng minh bất đẳng thức

Vì năng lực còn nhiều hạn chế nên ở chuyên đề có những thiếu sót nhất định. Rất mong nhận được sự thông cảm và góp ý để chuyên đề được tốt hơn:

1. Phương trình tiếp tuyến tổng quát

Giả sử (C) là đồ thị hàm số $y = f(x)$; $A(x_0, y_0 = f(x_0)) \in (C)$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm A có phương trình:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (1)$$

Nếu không có giả thiết hạn chế gì về x_0 thì A là một điểm tùy ý đã cho của (C) và tiếp tuyến (1) là tiếp tuyến tổng quát của (C) , ta gọi (1) là phương trình tiếp tuyến tổng quát của đồ thị $y = f(x)$.

2. Sử dụng tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức

Nhận xét: Nếu $y = ax + b$ là tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0, y_0)$ (A không phải là điểm uốn) khi đó tồn tại khoảng D chứa điểm x_0 sao cho:

$$\begin{cases} f(x) \geq ax+b \\ f(x) \leq ax+b \end{cases} \text{ với } \forall x \in D.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = x_0$.

Từ đó ta có $\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq a \sum_{i=1}^n x_i + bn (*)$

Hoặc $\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq a \sum_{i=1}^n x_i + bn (**)$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in D.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_0$

3. Ví dụ

Ví dụ 1: (Russia MO 2002) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. CMR:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

Nhận xét: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Mới vào đề thì ta thấy bất đẳng thức không có dạng (*) (**). Để đưa về dạng đó ta nhớ đến đẳng thức : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Nhân 2 rồi thêm $a^2 + b^2 + c^2$ vào 2 vế bất đẳng thức:

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq (a + b + c)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 9 \text{ trong đó } f(x) = x^2 + 2\sqrt{x} \text{ với } x \in (0; 3).$$

Suy ra tiếp tuyến đồ thị của hàm số tại điểm $x = 1$ là $y = 3x$.

Giải:

$$\text{Xét } x^2 - 2\sqrt{x} - 3x = (\sqrt{x} - 1)^2 (x + 2\sqrt{x}) \geq 0; \forall x \in (0; 3)$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq 3(a + b + c) = (a + b + c)^2$$

$$\text{Hay } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ta cũng có thể chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ như sau:

$$\text{Ta có: } 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\text{Ta cần chứng minh } a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq 9$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho 3 số hạng ta có:

$$\begin{cases} a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3a \\ b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geq 3b \\ c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c} \geq 3c \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức lại ta có điều cần phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Hay sử dụng bất đẳng thức $Holder$:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^3 = 27$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2 \leq 27$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo $AM-GM$:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2 \leq \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + ab + bc + ca}{3} \right]^3 = 27$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

Giải:

Bất đẳng thức trở thành $f(a) + f(b) + f(c) \geq 0$ Với $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$, $f(x)$ có phương trình tiếp tuyến tại $x = 1$ là $y = -4x + 4$.

Ta có đánh giá sau: $f(a) \geq -4a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1) \geq 0$

Tương tự như vậy. Ta có:

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) &\geq -4a + 4 - 4b + 4 - 4c + 4 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1) + (b-1)^2(2b-1) + (c-1)^2(2c-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2a-b-c)^2(2a-1) + (2b-c-a)^2(2b-1) + (2c-a-b)^2(2c-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0 \end{aligned}$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur* bậc 3. Kết thúc chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Nhận xét: Vì đây là bất đẳng thức thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $a+b+c = 1$

Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 9 &\geq 4 \left(\frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \right) \leq 9 \\ &\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 9 \end{aligned}$$

Trong đó $f(x) = \frac{4}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x-x^2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại $x = \frac{1}{3}$ là $y = 18x - 3$.

Giải: Không mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=1$

Bất đẳng thức trở thành

$$\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right)\leq 9$$

Ta sẽ chứng minh: $18a-3\geq \frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}$

Hay
$$\frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a(1-a)}\leq 0 \quad (*)$$

Vì a, b, c là 3 cạnh tam giác thỏa mãn $a+b+c=1$. Giả sử $a=\max\{a, b, c\}$. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $1=a+b+c>2a\Rightarrow a<\frac{1}{2}$. Suy ra $a, b, c\in\left(0; \frac{1}{2}\right)$ Do đó (*)

đúng hay $18a-3\geq \frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}$.

Cộng về theo về các bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}+\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}+\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\leq 18a-3+18b-3+18c-3=9$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Ví dụ 4: Với các số thực không âm tùy ý có tổng bằng 3. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\leq 1$$

Hướng dẫn:

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\leq 1$

Ta nhận thấy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ và bất đẳng thức đã cho có dạng

$f(a)+f(b)+f(c)\leq 1$ trong đó $f(x)=\frac{1}{x^2-x+3}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=\frac{4-x}{9}$. Ta có

$$f(x) - \frac{4-x}{9} = \frac{(x-1)^2(x-3)}{9(x^2-x+3)} \leq 0 \text{ (đúng với } x \in (0;3))$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{4-x}{9} \text{ với } x \in (0;3) \text{ (*)}$$

Áp dụng (*) ta có

$$\frac{1}{a^2-a+3} + \frac{1}{b^2-b+3} + \frac{1}{c^2-c+3} \leq \frac{4-a}{9} + \frac{4-b}{9} + \frac{4-c}{9} = 3 \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Nhận xét: bài này chúng ta có thể giải bằng kĩ thuật phân tách *Chebyshev*

Chúng ta có phân tích sau

$$\frac{1}{a^2+b+c} - \frac{1}{3} = \frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} \frac{a(a-1)}{a^2-a+3} + \frac{b(b-1)}{b^2-b+3} + \frac{c(c-1)}{c^2-c+3} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} + \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} &\geq 0 \end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có

$$a-1 \geq b-1 \geq c-1.$$

Và $a+b+c=3$ nên $ab, bc, ca < 3$. Do đó

$$\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} \geq \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} \geq \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 dãy trên ta có điều phải chứng minh

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Ví dụ 5: Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a) \quad \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

$$b) \quad \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Hướng dẫn

a, Ta xét hàm số $f(a) = \frac{a^2}{a+b}$ có $f'(a) = \frac{a^2+2ab}{(a+b)^2}$

Ta nhận thấy dấu bằng xảy ra khi $a=b$. Lúc đó ta sẽ đánh giá

$f(a) \geq f'(b)(a-b) + f(b)$. Ta có

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0 \text{ (đúng) (*)}$$

Áp dụng (*) ta có:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} = \frac{a+b+c}{2} \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b, Ta xét hàm số $f(a) = \frac{a^3}{a^2+b^2}$ có $f'(a) = \frac{a^4+3a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$. Ta sẽ đánh giá

$f(a) \geq f'(b)(a-b) + f(b)$. Ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} \geq \frac{2a-b}{2} \Leftrightarrow \frac{b(a-b)^2}{2(a^2+b^2)} \geq 0 \text{ (đúng) (**)}$$

Áp dụng (**) ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{2a-b}{2} + \frac{2b-c}{2} + \frac{2c-a}{2} = \frac{a+b+c}{2} \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Nhận xét: Bài toán này chúng ta đã sử dụng tư tưởng của phương pháp hệ số bất định (UCT). Đây là một dạng của phương pháp tuyến tuyến. Chúng ta sẽ đi thêm 1 bài toán để có thể có thể củng cố được phương pháp này

Ví dụ 6 Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Hướng dẫn:

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = d = 1$ và bất đẳng thức chứng minh có dạng

$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq 2$ trong đó $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = \frac{2-x}{2}$

Ta sẽ đánh giá: $f(x) \geq \frac{2-x}{2}$. Ta có:

$$f(x) \geq \frac{2-x}{2} \Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geq 0 \text{ (đúng) (*)}$$

Áp dụng (*) ta có

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq \frac{2-a}{2} + \frac{2-b}{2} + \frac{2-c}{2} + \frac{2-d}{2} = 2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$

Nhận xét: Bài toán này chúng ta cũng có thể tìm được bất đẳng phụ bằng phương pháp UCT và kỹ thuật AM-GM ngược dấu

Cách 2: Dùng phương pháp UCT

Ta sẽ xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2}{a^2+1} \geq 1 + m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left(-\frac{a+1}{a^2+1} - m \right) \geq 0$$

Khi $a=1$ ta sẽ có $-\frac{a+1}{a^2+1}=-1 \Rightarrow m=-1$. Ta dự đoán bất đẳng thức sau đúng:

$$\frac{2}{a^2+1} \geq 2-a \Leftrightarrow \frac{a(a-1)^2}{a^2+1} \geq 0$$

Tương tự với các biến còn lại ta cũng có:

$$\begin{cases} \frac{2}{b^2+1} \geq 2-b \\ \frac{2}{c^2+1} \geq 2-c \\ \frac{2}{d^2+1} \geq 2-d \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Cách 3: Sử dụng kỹ thuật AM-GM ngược dấu:

Ta có phân tích như sau $\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$

Các biến còn lại tương tự. Cộng vế theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Bài 5: Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực không âm thỏa mãn $\sum_{i=1}^n a_i = n$. Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \frac{n}{8}$$

Hướng dẫn:

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ và bất đẳng thức chứng minh có dạng

$\sum_{i=1}^n f(a_i) \leq \frac{n}{8}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

$y = \frac{x+3}{32}$. Ta sẽ đánh giá $f(x) \leq \frac{x+3}{32}$

Ta có:
$$f(x) \leq \frac{x+3}{32} \Leftrightarrow \frac{(5+x)(x-1)^2}{32(3x^2+5)} \geq 0 \text{ (đúng) (*)}$$

Áp dụng (*) ta có
$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i+3}{32} = \frac{n+3n}{32} = \frac{n}{8}$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Nhận xét: Bài này chúng ta có thể sử dụng phương pháp UCT (hệ số bất định) để tìm ra bất đẳng thức phụ

Ta sẽ tìm hệ số m sao cho

$$\frac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \frac{1}{8} + m(a_i-1) \Leftrightarrow \frac{(5-3a_i)(a_i-1)}{8(3a_i^2+5)} \leq m(a_i-1)$$

Ta dự đoán rằng với $m = \frac{1}{32}$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy:

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{3a_i^2+5} &\leq \frac{1}{8} + \frac{a_i-1}{32} \\ &\Leftrightarrow \frac{(5+a_i)(a_i-1)^2}{8(3a_i^2+5)} \geq 0 \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các biến bằng nhau và bằng 1

Ví dụ 7 (USA MO 2003)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Hướng dẫn:

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$. Khi đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ và bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$f(a)+f(b)+f(c) \leq 8$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{3}$ là $y=\frac{12x+4}{3}$. Ta sẽ đánh giá $f(x) \leq \frac{12x+4}{3}$

Ta có

$$f(x) - \frac{12x+4}{3} = \frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2} - \frac{12x+4}{3} = \frac{-(4x+1)(3x-1)^2}{2x^2+(1-x)^2} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } f(x) \leq \frac{12x+4}{3} (*)$$

Áp dụng (*) ta có

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq \frac{12a+4}{3} + \frac{12b+4}{3} + \frac{12c+4}{3} = 8$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 8: Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \frac{x_i + n}{x_i^2 + 1} \leq n^2$.

Đây là một bài toán có số lượng biến số tổng quát và thoát nhìn qua một số bạn sẽ cảm thấy lo sợ. Nhưng hãy cứ bình tĩnh và áp dụng các phương pháp mà ta đã biết, và thực tế bài toán trên có thể giải quyết rất đẹp mắt bằng phương pháp tiếp tuyến như sau:

Lời giải 1: Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi các biến đôi một bằng nhau và bằng $\frac{1}{n}$ và vì thế như các ví dụ trước ta sẽ hi vọng rằng có đánh giá:

$$\frac{x_i + n}{x_i^2 + 1} \leq n + k \left(x_i - \frac{1}{n} \right) (*) \text{ với } k \text{ là một hệ số nào đó (Việc xuất hiện của hệ số } k \text{ là}$$

hoàn toàn tự nhiên bởi nếu ta đánh giá ngay $\frac{x_i + n}{x_i^2 + 1} \leq n$ thì sẽ không thể luôn đúng được).

Bất đẳng thức (*) tương đương với $\frac{nx_i \left(\frac{1}{n} - x_i \right)}{x_i^2 + 1} \leq k \left(x_i - \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - x_i \right) \left(\frac{nx_i}{x_i^2 + 1} + k \right) \leq 0$

Thay giá trị đạt dấu đẳng thức của x_i vào ta dự đoán được $k = \frac{-n^2}{n^2 + 1}$.

Ta sẽ thử chứng minh $\frac{x_i + n}{x_i^2 + 1} \leq n - \frac{n^2}{n^2 + 1} \left(x_i - \frac{1}{n} \right)$

Thật vậy điều trên tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x_i + n}{x_i^2 + 1} - n + \frac{n^2}{n^2 + 1} \left(x_i - \frac{1}{n} \right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n \left(\frac{1}{n} - x_i \right) (x_i n^2 + x_i - n x_i^2 - n)}{(x_i^2 + 1)(n^2 + 1)} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} - x_i \right)^2 (x_i - n)}{(x_i^2 + 1)(n^2 + 1)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $x_i < 1 \leq n \forall i$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Lời giải 2: Ngoài việc áp dụng trực tiếp phương pháp tiếp tuyến như trên ta còn có một lời giải khác khá khó cho bất đẳng thức trên như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 bộ số đơn điệu ngược chiều $(x_i + n)$ và

$\left(\frac{1}{x_i^2 + 1} \right)$ ta có:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i + n}{x_i^2 + 1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + n) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + 1} = \frac{1}{n(n^2 + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + 1}$$

Và do đó ta chỉ còn phải chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + 1} \leq \frac{n^3}{n^2 + 1}$.

Với $n = 1$ hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

Với $n = 2$ ta cần chứng minh $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow \left(ab - \frac{1}{2}\right)\left(ab - \frac{1}{4}\right) \geq 0$

Bất đẳng thức trên đúng theo AM-GM : $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Với $n \geq 3$ ta sẽ chứng minh $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + 1} \leq \frac{n^3}{n^2 + 1}$. Sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{x_i^2 + 1} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1} - \frac{2n^2(nx_i - 1)}{(n^2 + 1)^2} \Leftrightarrow (nx_i^2 - 1)^2(n^2 - 2nx_i - 1) \geq 0 \quad (**)$$

Do $x_i < 1 \leq n \forall i$ nên ta có $n^2 - 2nx_i - 1 > n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq (3-1)^2 - 2 > 0$. Vậy bất đẳng thức (**) đúng suy ra đánh giá của chúng ta đúng. Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng lại ta có điều phải chứng minh.

Qua các ví dụ trên ắt hẳn các bạn đã nắm được tư tưởng của phương pháp này. Với các bài toán mà bất đẳng thức cần chứng minh biểu diễn ở dạng từng hàm số riêng biệt đối với các biến thì việc sử dụng trực tiếp phương pháp đánh giá bằng tiếp tuyến thường cho ta ngay một kết quả đẹp mắt. Tuy nhiên không phải bao giờ chúng ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức một cách dễ dàng như vậy, ở rất nhiều bài toán khác chúng ta không thể đi đến kết quả bằng phương pháp tiếp tuyến thông thường mà còn phải thông qua các bước biến đổi hoặc đánh giá bằng các bất đẳng thức quen biết trước, ví dụ sau sẽ làm rõ điều này:

Ví dụ 9: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1.$$

Rõ ràng ta không thể sử dụng ngay phương pháp tiếp tuyến và cả UCT do biểu thức còn chứa tích của 2 biến số, chính vì thế ta sẽ tìm cách "nói" mối liên hệ

này ra để có thể dễ dàng đánh giá theo từng biến riêng biệt, và cách chúng ta dùng ở đây sẽ là bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} &\leq \frac{1}{4-\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{1}{4-\frac{b^2+c^2}{2}} + \frac{1}{4-\frac{c^2+a^2}{2}} \\ &= \frac{2}{8-a^2-b^2} + \frac{2}{8-b^2-c^2} + \frac{2}{8-c^2-a^2} \end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{2}{8-a^2-b^2} = \frac{4}{8-2a^2+8-2b^2} \leq \frac{1}{8-2a^2} + \frac{1}{8-2b^2}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng lại ta được:

$$\frac{2}{8-a^2-b^2} + \frac{2}{8-b^2-c^2} + \frac{2}{8-c^2-a^2} \leq \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} + \frac{1}{4-c^2}$$

Tới đây các biến số đã được tách nhau ra một cách riêng biệt và ta có thể sử dụng đánh giá sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-a^2} &\leq \frac{1}{3} + \frac{a^4-1}{18} \\ \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(a+1)^2(a^2-2)}{18(2-a)(2+a)} &\leq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Do $a^4+b^4+c^4=3 \Rightarrow a,b,c \in [0;\sqrt[4]{3}]$ suy ra (*) luôn đúng. Áp dụng các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức chỉ khi $a=b=c=1$.

Qua các ví dụ vừa rồi, không ít người sẽ tưởng chừng việc sử dụng tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức khá là đơn giản vì ta chỉ cần tìm được tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$. Nhưng không, đó chỉ là một bước khởi động trước khi đi vào điểm khó của phương pháp này. Cụ thể, trong một số lớp bài toán, ngoài việc tìm được tiếp tuyến, chúng ta còn phải phân chia nhiều trường hợp thì bài toán mới được thỏa đáng. Hãy xem một số ví dụ dưới đây:

Ví dụ 10 Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$10(x^3 + y^3 + z^3) - 9(x^5 + y^5 + z^5) \geq 1$$

Nhận xét:

Để ý rằng dấu đẳng thức xảy ra ngoài bộ $x = y = z = \frac{1}{3}$ thì còn có bộ $x = 1; y = z = 0$.

Chính điều này đã gây nên điểm khó khăn cho bài toán. Chúng ta hãy xem xét lời giải sau đây:

Bằng việc sử dụng phương pháp U.C.T, ta dự đoán có bất đẳng thức sau:

$$10x^3 - 9x^5 \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2(27x^3 + 18x^2 - 21x - 16) \geq 0$$

Khác với những ví dụ đầu tiên thì rõ ràng là bất đẳng thức vừa thu được không phải luôn đúng. Tính đúng đắn của nó phụ thuộc vào dấu của

$$f(x) = 27x^3 + 18x^2 - 21x - 16$$

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 = \frac{\sqrt[3]{145+30\sqrt{6}}}{9} - \frac{25}{9\sqrt[3]{145+30\sqrt{6}}} - \frac{2}{9} \approx \frac{9}{10}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x; y; z\}$. Xét 2 trường hợp:

- Trường hợp 1. Trong 3 số có 1 số $\in \left[\frac{9}{10}; 1\right]$, hay $x \in \left[\frac{9}{10}; 1\right]$

$$\Rightarrow y, z \in \left[0; \frac{1}{10}\right]. \Rightarrow \begin{cases} 10x^3 - 5x^5 \geq 5 \\ 10y^3 - 9y^5 \geq 0 \\ 10z^3 - 9z^5 \geq 0 \end{cases}$$

Do đó ta cần chứng minh $4 \geq 4x^5$ hay $x \leq 1$ (đúng)

- Trường hợp 2: $x, y, z \in \left[0; \frac{9}{10}\right]$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\begin{cases} 10x^3 - 9x^5 \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27} \\ 10y^3 - 9y^5 \geq \frac{25}{9}y - \frac{16}{27} \\ 10z^3 - 9z^5 \geq \frac{25}{9}z - \frac{16}{27} \end{cases} \Rightarrow \sum (10x^3 - 9x^5) \geq \sum \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27} \right)$$

$$\text{Hay } 10(x^3 + y^3 + z^3) - 9(x^5 + y^5 + z^5) \geq 1$$

Kết thúc chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$; $x = 1; y = z = 0$ cùng các hoán vị tương ứng .

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Nguyễn Trần Duy – Mai Xuân Sơn

1. Cơ sở lý thuyết

- Cực trị có điều kiện của hàm hai biến $f(x; y)$ là cực trị của hàm này với điều kiện ràng buộc $\delta(x, y) = 0$.

- Để tìm cực trị của hàm trên khi có điều kiện ràng buộc, ta thiết lập hàm nhân tử Lagrange

$$L_{(x;y;\lambda)} = f(x; y) + \lambda \cdot \delta(x; y)$$

Với λ làm một nhân tử hằng chưa xác định, gọi là nhân tử Lagrange.

Điều kiện cần của cực trị là hệ ba phương trình

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot \delta'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot \delta'_y(x, y) = 0 \\ \delta'(x, y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặc tính của cực trị có điều kiện có thể giải bằng cách xét dấu vi phân cấp hai của hàm Lagrange tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ và λ_0 với $x_0; y_0; \lambda_0$ là nghiệm của hệ điểm dừng, hoặc xét một bộ $(x_1; y_1)$ khác thoả mãn điều kiện rồi so sánh $f(x_0; y_0)$ với $f(x_1; y_1)$ để kiểm tra điểm dừng là cực đại hay cực tiểu.

- Khi giải một bài toán sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, ta thực hiện các bước cơ bản:

1. Thiết lập hàm Lagrange.

2. Giải hệ phương trình (*) để tìm điểm dừng.

3. Xét bộ $(x_1; y_1)$ khác thoả mãn điều kiện rồi so sánh $f(x_0; y_0)$ với $f(x_1; y_1)$

Ta cùng xem xét các ví dụ sau

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Với x, y dương thỏa mãn $x^3 + y^3 = 10$. Tìm giá trị lớn nhất của: $x^2 + y^2$

Giải

Thiết lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 10)$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 2x + 3\lambda x^2 = 0 \\ 2y + 3\lambda y^2 = 0 \\ x^3 + y^3 = 10 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ hai ta suy ra $\frac{2x}{3x^2} = \frac{2y}{3y^2} = -\lambda$

Ta có cực trị xảy ra khi và chỉ khi $x = y$, từ đây có điểm dừng $\left(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \frac{-2\sqrt[3]{25}}{15}\right)$

Giá trị lớn nhất của $x^2 + y^2$ là $2\sqrt[3]{25}$. $(x^2 + y^2)^3 \leq (1+1)(x^3 + y^3)(x^3 + y^3)$

Chú ý: Với ví dụ này, dấu bằng xảy ra tại tâm nên không khó để ta có thể nghĩ ra cách giải sau:

Theo bất đẳng thức Holder:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^3 &\leq (1+1)(x^3 + y^3)(x^3 + y^3) = 200 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &\leq 2\sqrt[3]{25} \end{aligned}$$

Ta cùng xét một ví dụ đơn giản nữa sau đây

Ví dụ 2: Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $a + b + c + d = 2$. Tìm Min $P = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2$

Lời giải 1

Thiết lập hàm Lagrange

$$L(a, b, c, d, \lambda) = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 - \lambda(a + b + c + d - 2)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2a - \lambda = 0 \\ 4b - \lambda = 0 \\ 4c - \lambda = 0 \\ 6d - \lambda = 0 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$ tương đương với: $\begin{cases} a = \frac{6}{7} \\ b = \frac{3}{7} \\ c = \frac{3}{7} \\ d = \frac{2}{7} \\ \lambda = \frac{12}{7} \end{cases}$

Khi đó $P = \frac{12}{7}$

Kết luận: Min $P = \frac{12}{7}$ tại $a = \frac{6}{7}; b = \frac{3}{7}; c = \frac{3}{7}; d = \frac{2}{7}$

Chú ý rằng sau khi biết giá trị Min của P xảy ra ở bộ $a = \frac{6}{7}; b = \frac{3}{7}; c = \frac{3}{7}; d = \frac{2}{7}$

bằng phương pháp nhân tử Lagrange thì có thể nghĩ ra cách lời giải sau:

Lời giải 2

Ta thấy

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{6}{7}\right)^2 + 2\left(b - \frac{3}{7}\right)^2 + 2\left(c - \frac{3}{7}\right)^2 + 3\left(d - \frac{2}{7}\right)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 &\geq \frac{12}{7}(a + b + c + d) - \frac{84}{49} = \frac{12}{7} \cdot 2 - \frac{84}{49} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

Hoặc không sử dụng nhân tử Lagrange, ta có thể dùng phương pháp điểm rơi AM-GM.

Ta cần có $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ dương để thực hiện các phép đánh giá sau bằng AM-GM:

$$\begin{aligned} a^2 + \alpha &\geq a \cdot 2\sqrt{\alpha} \\ 2b^2 + \beta &\geq b \cdot 2\sqrt{2\beta} \\ 2c^2 + \gamma &\geq c \cdot 2\sqrt{2\gamma} \\ 3d^2 + \lambda &\geq d \cdot 2\sqrt{3\lambda} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 \geq a \cdot 2\sqrt{\alpha} + b \cdot 2\sqrt{2\beta} + c \cdot 2\sqrt{2\gamma} + d \cdot 2\sqrt{3\lambda} - (\alpha + \beta + \gamma + \lambda)$$

Để sử dụng được điều kiện $a+b+c+d=2$, ta cần có $2\sqrt{\alpha}=2\sqrt{2\beta}=2\sqrt{2\gamma}=2\sqrt{3\lambda}$
 $\Rightarrow \alpha=2\beta=2\gamma=3\lambda$ (1)

Mà theo điều kiện dấu bằng của bất đẳng thức AM-GM $\begin{cases} a^2 = \alpha \\ 2b^2 = \beta \\ 2c^2 = \gamma \\ 3d^2 = \lambda \end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1): $a^2=4b^2=4c^2=9d^2$ Chú ý rằng $a,b,c,d>0$ nên $a=2b=2c=3d$

Từ đó cùng với $a+b+c+d=2$ thì $a=\frac{6}{7}; b=\frac{3}{7}; c=\frac{3}{7}; d=\frac{2}{7}$

Qua các bài toán trên, ta đã thấy được sự tiện lợi khi sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange. Nhưng sẽ có ý kiến cho rằng phương pháp Lagrange chưa thật sự thuyết phục, vì sử dụng các phương pháp đơn giản hơn vẫn có thể giải quyết một cách nhanh chóng, nhưng với những bài toán có điều kiện dấu bằng phức tạp, các phương pháp khác lập tức sẽ gặp khó khăn, xét bài toán sau

Ví dụ 3: (British Mathematical Olympiad 1996)

Cho a,b,c thực thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A=a^2b+b^2c+c^2a$$

Nhận xét: Với loại bài toán có điều kiện như thế này, nhân tử Lagrange tỏ ra vô cùng hữu hiệu. Ta cùng tham khảo lời giải sau:

Xét hàm nhân tử Lagrange

$$L(a,b,c,\lambda_1,\lambda_2)=a^2b+b^2c+c^2a+\lambda_1(a+b+c)+\lambda_2(a^2+b^2+c^2-6)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2ab+c^2+\lambda_1+2\lambda_2a=0 \\ 2bc+a^2+\lambda_1+2\lambda_2b=0 \\ 2ca+b^2+\lambda_1+2\lambda_2c=0 \\ a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases}$

Cộng về theo về của ba phương trình đầu tiên lại, ta được

$$(a+b+c)^2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(a+b+c) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} 2ab + c^2 + 2\lambda_2 a = 0 \\ 2bc + a^2 + 2\lambda_2 b = 0 \\ 2ca + b^2 + 2\lambda_2 c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{2ab+c^2}{a} = \frac{2bc+a^2}{b} = \frac{2ca+b^2}{c} \text{ (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0) (*)}$$

Ta đã tìm được điều kiện xảy ra dấu bằng của bài toán này, từ đây có thể sử dụng Cauchy Schwarz như sau

$$\left[a(2ab+c^2) + b(2bc+a^2) + c(2ca+b^2) \right]^2 \leq (a^2+b^2+c^2) \left[(2ab+c^2)^2 + (2bc+a^2)^2 + (2ca+b^2)^2 \right]$$

$$\text{Lại có } a(2ab+c^2) + b(2bc+a^2) + c(2ca+b^2) = 3(a^2b+b^2c+c^2b)$$

$$\text{Và } (2ab+c^2)^2 + (2bc+a^2)^2 + (2ca+b^2)^2 = 2(ab+bc+ca)^2 + (a^2+b^2+c^2)^2 = 54$$

Do đó $A \leq 6$.

Giờ ta cần giải tìm điều kiện dấu bằng xảy ra với bộ a, b, c như thế nào.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2ab+c^2}{a} &= \frac{2bc+a^2}{b} = \frac{2ca+b^2}{c} \\ \Rightarrow \frac{(2ab+c^2)^2}{a^2} &= \frac{(2bc+a^2)^2}{b^2} = \frac{(2ca+b^2)^2}{c^2} = \frac{(2ab+c^2)^2 + (2bc+a^2)^2 + (2ca+b^2)^2}{a^2+b^2+c^2} = 9 \\ \Rightarrow \frac{2ab+c^2}{a} &= \frac{2bc+a^2}{b} = \frac{2ca+b^2}{c} = \pm 3 \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
\frac{2ab+c^2}{a} &= \frac{2bc+a^2}{b} \\
\Rightarrow 2ab^2+c^2b &= 2abc+a^3 \\
\Rightarrow -2b^2(b+c)+c^2b &= -2bc(b+c)+(6-b^2-c^2)(-b-c) \\
\Rightarrow 2bc^2+6b+6c &= 3b^3+b^2c+c^3
\end{aligned}$$

Xây dựng 2 đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta được

$$\begin{aligned}
2bc^2+2ca^2+2ab^2 &= 4(a^3+b^3+c^3)+b^2c+c^2a+a^2b=4(a^3+b^3+c^3)+6 \\
\Rightarrow bc^2+ca^2+ab^2 &= 2(a^3+b^3+c^3)+3 \quad (1)
\end{aligned}$$

Với $\frac{2ab+c^2}{a} = \frac{2bc+a^2}{b} = \frac{2ca+b^2}{c} = 3$

Ta có

$$\begin{aligned}
2ab+c^2 &= 3a \\
\Rightarrow 2ab^2+c^2b &= 3ab
\end{aligned}$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta được

$$ab^2+bc^2+ca^2=ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}=-3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $a^3+b^3+c^3=-3$

Với $\frac{2ab+c^2}{a} = \frac{2bc+a^2}{b} = \frac{2ca+b^2}{c} = -3$

Tương tự trên ta có $a^3+b^3+c^3=0$

Tổng hợp lại ta có hệ

$$\begin{aligned}
\left[\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \\ a^3+b^3+c^3=-3 \end{cases} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a+b+c=0 \\ (b+c)^2+b^2+c^2=6 \\ -(b+c)^3+b^3+c^3=-3 \end{cases} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a+b+c=0 \\ b^2+c^2+bc=3 \\ bc(b+c)=1 \end{cases} \right] \\
\left[\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{cases} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a+b+c=0 \\ (b+c)^2+b^2+c^2=6 \\ -(b+c)^3+b^3+c^3=0 \end{cases} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a+b+c=0 \\ b^2+c^2+bc=3 \\ bc(b+c)=0 \end{cases} \right]
\end{aligned}$$

Xét hệ (I)

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b^2+c^2+bc=3 \\ bc(b+c)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b^2+c^2-\frac{1}{a}=3 \Rightarrow a^3-3a+1=0 \\ abc=-1 \end{cases}$$

Một cách tương tự, ta có a, b, c lần lượt là ba nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Ta thấy $\begin{cases} f(-1)f(-2) < 0 \\ f(-1)f(1) < 0 \\ f(1)f(2) < 0 \end{cases}$

Nên 3 nghiệm của $f(x)$ thuộc khoảng $(-2; 2)$.

Từ đó đặt $x = 2\cos\alpha$ xét $\alpha \in (0; \pi)$, ta có:

$$\begin{aligned} 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos 3\alpha &= -1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\alpha \in (0; \pi) \text{ nên ta có 3 nghiệm } x = 2\cos\frac{2\pi}{9}; x = \cos\frac{4\pi}{9}; x = \cos\frac{8\pi}{9}$$

Xét hệ (II) $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b^2+c^2+bc=3 \\ bc(b+c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

Từ quy ước (*) ta suy ra một trong 3 số bằng 0 thì cả 3 số bằng 0, trái điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

Kết luận: $A \leq 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2\cos\frac{2\pi}{9}; b = \cos\frac{4\pi}{9}; c = \cos\frac{8\pi}{9}$

và các hoán vị vòng quanh tương ứng.

Quả vậy điều kiện đẳng thức của loại bài toán này rất phức tạp, việc tìm ra nó bằng các cách giải sơ cấp là không khả thi, phương pháp nhân tử Lagrange được đưa ra chính để giải quyết vấn đề điều kiện dấu bằng, dù phức tạp đến đâu cũng tường minh trọn vẹn.

Ví dụ 4: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm GTLN của

$$P = |a^3 + b^3 + c^3 - abc|.$$

Nhận xét : Trước khi giải quyết bài toán này, ta có những nhận xét sau đây:

Đặt biểu thức bên trong dấu giá trị tuyệt đối là Q thì Q nhận cả các giá trị âm và dương với điều kiện bài toán. Từ đó $\max P = \max \{|\min Q|, |\max Q|\}$

Vì vậy có thể đi theo con đường sau: tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của Q rồi so sánh giá trị tuyệt đối của chúng. Hướng đi này làm ta nghĩ đến phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị của hàm nhiều biến có điều kiện.

Giải

Chuyển biểu thức Q sang ẩn $p, q, r (p = a + b + c; q = ab + bc + ca; r = abc)$ ta có

$$Q = p^3 - 3pq + 2r$$

Xét $f(r) = Q$, ta có $f(r)$ là hàm đơn điệu trên \square nên theo định lý ABC, giá trị nhỏ nhất và lớn nhất đạt khi ba số a, b, c có hai số bằng nhau.

Giả sử $a = b$, khi đó $Q = 2a^3 + c^3 - a^2c$ với điều kiện ràng buộc $2a^2 + c^2 = 1$

Xây dựng hàm Lagrange $L = 2a^3 + c^3 - a^2c + \lambda(2a^2 + c^2 - 1)$

$$\text{Điểm dừng là nghiệm của hệ } \begin{cases} 6a^2 - 2ac + 4a\lambda = 0 \\ 3c^2 - a^2 + 2c\lambda = 0 \\ 2a^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Xét khi $a = 0$ thì $a = 0, b = 0, c = \pm 1$ và $P = 1$

$$\text{Khi } c = 0 \text{ thì } a = b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, c = 0 \text{ và } P = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Khi a, b, c khác 0, từ hệ điểm dừng ta có

$$\begin{aligned} \frac{6a^2 - 2ac}{4a} &= \frac{3c^2 - a^2}{2c} \\ \Rightarrow 4c^2 - 3ac - a^2 &= 0 \\ \Rightarrow (a - c)(4c + a) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -4c \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp $2a^2 + c^2 = 1$ ta có

$$\left[\begin{cases} a = -4c \\ 2a^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{4}{\sqrt{33}} \\ c = \mp \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{13}{3\sqrt{33}} \\ P = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases} \right.$$

So sánh các giá trị của P ta thu được: $\max P = 1$

Kết luận: $\max P = 1$ tại bộ $(a, b, c) = \{(0; 0; 1), (0; 0; -1)\}$ và các hoán vị.

Chú ý: ta có thể giải bài toán này bằng lời giải sơ cấp hơn, tham khảo cách làm của một thành viên diendantoanhoc.net như sau:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \left(|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \right)^2 &= (a^3 + b^3 + c^3 - abc)^2 = [a^3 + b^3 + c(c^2 - ab)]^2 \\ &\leq (a^2 + b^2 + c^2) [a^4 + b^4 + (c^2 - ab)^2] \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2ab + a^2b^2 \end{aligned}$$

Ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &\geq -2ab \\ \Rightarrow a^2c^2 + b^2c^2 &\geq -2abc^2 \end{aligned}$$

Vì thế

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2ab + a^2b^2 &\leq a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ &\leq a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1 \end{aligned}$$

Vậy $P \leq 1$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a,b,c là một hoán vị của một trong hai bộ (0,0,1) và (0,0,-1)

Lời giải sơ cấp trên rất dễ hiểu nhưng để có được lời giải đẹp này, thực sự người làm toán cần có một kỹ năng đánh giá điêu luyện, bởi có những bước đánh giá khá thiếu tự nhiên, như bước $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. Do vậy dù đây

là lời giải sơ cấp, nhưng việc nghĩ ra lời giải này vô cùng khó khăn, ít nhất là bằng cách nào đó, ta phải biết trước điều kiện đẳng thức của bài toán.

Ví dụ 5: Cho x, y, z không âm thỏa $x + y + z = \frac{1}{9}$. Tìm Min và Max của

$$P = x^2 + 2y^2 + 3z^3.$$

Thiết lập hàm nhân tử Lagrange $L(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 - \lambda(x + y + z)$

Điểm Max, Min là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 4y - \lambda = 0 \\ 9z^2 - \lambda = 0 \\ x + y + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{81} \\ y = \frac{1}{81} \\ z = \frac{2}{27} \\ \lambda = \frac{4}{81} \end{cases}$$

Khi đó $P = \frac{14}{6561}$.

Xét các trường hợp tại biên

Trường hợp 1: $z = 0$. Khi đó $x + y = \frac{1}{9}$ và $L(x, y, 0) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x + y) = g(x, y)$

Điểm Max, Min là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 4y - \lambda = 0 \\ x + y = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{27} \\ y = \frac{1}{27} \\ \lambda = \frac{4}{27} \end{cases}$$

Khi đó $P = \frac{2}{243}$

Tương tự với các trường hợp còn lại $P \in \left\{ \frac{1}{81}; \frac{2}{81}; \frac{1}{243}; \frac{11-6\sqrt{3}}{243}; \frac{46-32\sqrt{2}}{243} \right\}$

So sánh tất cả, ta đi đến đáp án:

Kết luận: $\min P = \frac{14}{6561}$ khi và chỉ khi $x = \frac{2}{81}; y = \frac{1}{81}; z = \frac{2}{27}$

$$\max P = \frac{2}{81} \text{ khi và chỉ khi } x = 0; y = \frac{1}{9}; z = 0$$

Ví dụ 6. (1999 Canada Math Olympiad)

Cho x, y, z là các số dương thỏa $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$A = x^2y + y^2z + z^2x + xyz \leq \frac{4}{27}$$

Giải

Thiết lập hàm Lagrange $L = x^2y + y^2z + z^2x + xyz + \lambda.(x + y + z - 1)$

$$\text{Điểm dừng tại hệ } \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hay ta có } \begin{cases} 2xy + z^2 + yz + \lambda = 0 \\ 2yz + x^2 + zx + \lambda = 0 \\ 2zx + y^2 + xy + \lambda = 0 \end{cases}$$

Rút λ ta được $2xy + z^2 + yz = 2yz + x^2 + xz = 2xz + y^2 + xy$

$$\text{Có hệ mới } \begin{cases} (x - y)(x + y - z) = y(x - z) \\ (y - z)(y + z - x) = z(y - x) \\ (z - x)(z + x - y) = x(z - y) \end{cases}$$

$$\text{Với } x = y = z \text{ ta có } L = \frac{4}{27}$$

Với x, y, z đôi một khác nhau ta có $xyz = (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$

Vô nghiệm do: $xyz \geq (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$ (*) với mọi x, y, z khác nhau, dương.

Thật vậy xét khi x, y, z là ba cạnh tam giác:

$$(x+y-z)(y+z-x) \leq \left(\frac{x+y-z+y+z-x}{2} \right)^2 = y^2$$

$$(y+z-x)(z+x-y) \leq \left(\frac{y+z-x+z+x-y}{2} \right)^2 = z^2$$

$$(z+x-y)(x+y-z) \leq \left(\frac{z+x-y+x+y-z}{2} \right)^2 = x^2$$

Nhân theo về các bất đẳng thức trên ta có $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

Khi x, y, z không là ba cạnh tam giác thì có các trường hợp sau xảy ra

- i. Một trong 3 tổng $(x+y-z); (y+z-x); (z+x-y)$ không dương, hai tổng còn lại dương, giả sử tổng không dương đó là $(x+y-z)$. Thì về phải của (*) không dương, về trái của (*) dương nên (*) hiển nhiên đúng
- ii. Tồn tại hai trong ba tổng $(x+y-z); (y+z-x); (z+x-y)$ không dương, giả sử là $(x+y-z)$ và $(y+z-x)$, ta có $x+2y < z+y < x$ (vô lí)

Vậy (*) luôn đúng.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = y = z$. Từ đó điểm dừng tại $x = y = z = \frac{1}{3}$

$$\text{Lại có } \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \\ f\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{64} < \frac{4}{27} \end{cases}$$

Kết luận ta có $A = x^2y + y^2z + z^2x + xyz \leq \frac{4}{27}$

Ví dụ 7: Cho a, b, c thực thỏa $a+b+c > 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}} + 3abc \quad (*)$$

Nhận xét: Bài toán này chưa có điều kiện ràng buộc nên ta chưa thể sử dụng phương pháp nhân từ Lagrange, nhưng chú ý bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức thuần nhất, nên ta có thể làm như sau

Giải

Chuẩn hoá $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ta có (*) trở thành: $a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 + 3abc$

Thiết lập hàm nhân tử Lagrange: $L(a, b, c, \lambda) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$

$$\text{Điểm dừng là nghiệm của hệ} \quad \begin{cases} 3a^2 - 3bc - 2a\lambda = 0 \\ 3b^2 - 3ca - 2b\lambda = 0 \\ 3c^2 - 3ab - 2c\lambda = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Rút λ ra ta được

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3(a^2 - bc)}{2a} = \frac{3(b^2 - ac)}{2b} = \frac{3(c^2 - ab)}{2c} \\ \Rightarrow \begin{cases} (a-b)(ab+bc+ca) = 0 \\ (a-c)(ab+bc+ca) = 0 \\ (b-c)(ab+bc+ca) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ ab+bc+ca = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi $a=b=c$ thì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 < 1$

Khi $ab+bc+ca=0$ thì $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 1$

Lại có $a+b+c > 0$ nên $a+b+c=1$

Từ đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 1$

3. Bài tập vận dụng

1. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + 15 \geq 3(a+b+c) + 4(ab+bc+ca)$$

Hướng dẫn: Thiết lập hàm Lagrange, giải hệ điểm dừng ta được $a=b=c$.

2. Cho $a, b, c \geq 0$ thoả $a+b+c=3$. Tìm Max của $P = (2a+c)b^2 + (a+c)(2c+a)b$

Hướng dẫn: xét riêng các trường hợp biên, rồi lập hàm Lagrange cho trường hợp tổng quát đáp số Max $P = 6\sqrt{3}$.

3. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

Hướng dẫn: Sau khi thiết lập hàm Lagrange, giải hệ điểm dừng được $a=b=c$, sau đó xét trường hợp biên.

Tương tự trên chứng minh các bất đẳng thức sau với $a, b, c \geq 0$

$$\text{i. } a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\text{ii. } a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-c)(b-a) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

Các bài toán này là các dạng đặc biệt và tổng quát của bất đẳng thức Schur

4. Cho $a, b, c \geq 0$ thoả $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của :

$$P = a^3 + b^3 + c^3$$

Hướng dẫn: tương tự bài VD2, ta sẽ dùng nhân tử Lagrange để tìm điều kiện dấu bằng xảy ra rồi sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

5. Cho $n \geq 2$ và $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ là $2n$ số thực thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1; \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1; \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$$

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \leq n$$

$$\text{Hướng dẫn: Đặt } A = \sum_{i=1}^n x_i, B = \sum_{i=1}^n y_i$$

Lập nhân tử Lagrange, viết phương trình tìm điểm dừng tổng quát.

Suy ra được dấu bằng xảy ra khi $Ax_i + By_i = 1$ rồi phân tích thành tổng các bình phương.

6. Cho x, y thoả mãn điều kiện $7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $5x^2 + 2xy + 3y^2$

7. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq \sum_{sym} a^2 b^2$$

Hướng dẫn: Sau khi lập hàm nhân tử Lagrange và đưa hệ điểm dừng, dùng bài toán 3 về bất đẳng thức Schur để chứng minh rằng hệ có nghiệm duy nhất khi $a=b=c=d$ hoặc $a=0, b=c=d$ và các hoán vị, từ đó đi đến kết quả.

$$8. \text{ Cho } \begin{cases} \sum_{i=1}^5 a_i = 1 \\ \sum_{i=1}^5 a_i^2 = 11 \end{cases} . \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } P = \sum_{i=1}^5 a_i^3$$

Hướng dẫn: Tương tự bài 4

9. Cho
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 a_i = 1 \\ \sum_{i=1}^5 a_i^2 = 13 \end{cases}$$
. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sum_{i=1}^5 a_i^3$

Hướng dẫn: Tương tự bài 9

10. Cho a, b, c, d, e thực thoả $a+b+c+d+e=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+bc+cd+de+ea}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Tài liệu:

- i. Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức.*
- ii. Trần Phương *Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học.*
- iii. Diendantoanhoc.net

KẾT LUẬN

Bài viết trình bày một số kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức từ cổ điển đến hiện đại, các ý tưởng, ví dụ và bài tập đã được sắp xếp một cách có hệ thống nhằm giúp cho đối tượng học sinh có điều kiện ôn tập, nghiên cứu và phát triển.

Do trình độ còn hạn chế nên trong bài viết không thể tránh khỏi những sai sót về trình bày cũng như về chuyên môn. Rất mong quý thầy cô và bạn đọc đóng góp ý kiến để đề tài có thể trở thành một tài liệu tham khảo tốt.

Xin chân thành cảm ơn.